

Homotopies i homologies: de Poincaré fins avui

Discurs de presentació de Carles Casacuberta Vergés
com a membre numerari de la Secció de Ciències
i Tecnologia, llegit el dia 8 de juliol de 2024



Institut
d'Estudis
Catalans

SECCIÓ
DE CIÈNCIES
I TECNOLOGIA

Homotopies i homologies:
de Poincaré fins avui

Homotopies i homologies: de Poincaré fins avui

Discurs de presentació de Carles Casacuberta Vergés
com a membre numerari de la Secció de Ciències
i Tecnologia, llegit el dia 8 de juliol de 2024

Barcelona, 2024



Institut
d'Estudis
Catalans

SECCIÓ
DE CIÈNCIES
I TECNOLOGIA

Biblioteca de Catalunya. Dades CIP

Casacuberta, Carles, autor

Homotopies i homologies: de Poincaré fins avui. — Primera edició

Referències bibliogràfiques

ISBN 9788499657523

I. Institut d'Estudis Catalans. Secció de Ciències i Tecnologia. II. Títol

1. Topologia algebraica — Història 2. Homologia 3. Homotopia, Teoria d'

515.14(091)

515.142.22/.23

515.143

© Carles Casacuberta Vergés

© 2024, Institut d'Estudis Catalans, per a aquesta edició

Carrer del Carme, 47. 08001 Barcelona

Primera edició: juliol del 2024

Text revisat lingüísticament per la Unitat d'Edició del Servei Editorial de l'IEC

Disseny de la coberta: Azcunce | Ventura

Imatge de la coberta creada per l'autor amb DALL·E

Compost per Carles Casacuberta Vergés

Imprès a Service Point FMI, SA

ISBN: 978-84-9965-752-3

Dipòsit Legal: B 13246-2024

DOI: 10.2436/10.2000.81.1



Aquesta obra és d'ús lliure, però està sotmesa a les condicions de la llicència pública de Creative Commons. Es pot reproduir, distribuir i comunicar l'obra sempre que se'n reconegui l'autoria i l'entitat que la publica i no se'n faci un ús comercial ni cap obra derivada. Es pot trobar una còpia completa dels termes d'aquesta llicència a l'adreça: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/deed.ca>.

Les disciplines científiques neixen i creixen, i la majoria no moren mai. Es transformen, s'adapten al seu temps i interaccionen les unes amb les altres. Quan dues disciplines conflueixen, sovint se n'obtenen fruits inesperats. Alguns ens sorprenen per la seva bellesa; d'altres, pel seu impacte, i els millors ho apleguen tot alhora.

En aquesta exposició parlaré de topologia; més concretament, de topologia algebraica. La topologia va néixer a l'albada del segle xx i des d'aleshores s'ha anat transformant i s'ha entrecruat amb altres ciències. Presentaré alguns dels avenços que s'hi han produït recentment i que tot just es començaven a entreveure fa dues dècades.

He triat l'homotopia i l'homologia com a protagonistes del meu relat. Aquests dos conceptes eren al bell mig del treball fundacional de la topologia algebraica: l'*Analysis situs*, d'Henri Poincaré (1854-1912), i han esdevingut els fonaments de dues línies de recerca puixants avui en dia: la verificació automàtica de demostracions i l'anàlisi de dades topològica.

1. ELS INICIS

L'obra *Analysis situs*, de Poincaré [23], publicada el 1895, es considera l'inici de la topologia algebraica, tot i que recull idees sobre connectivitat de varietats elaborades temps enrere per Bernhard Riemann (1826-1866) i Enrico Betti (1823-1892). Els dos conceptes centrals de l'*Analysis situs* eren l'homologia i el grup fonamental (també anomenat, uns anys més tard, *primer grup d'homotopia*), que seran els conductors de la meva exposició.

En aquella època encara no es parlava de topologia com una disciplina matemàtica. El terme *analysis situs* l'havia començat a utilitzar molt abans Gottfried Leibniz (1646-1716) per descriure una fonamentació de la geometria que, en paraules de Poincaré, «décrit la situation relative des points, des lignes et des surfaces, sans aucune considération de leur grandeur» («descriu la posició relativa dels punts, les línies i les superfícies sense tenir-ne en compte la grandària»).



FIGURA 1. Jules Henri Poincaré (1854-1912).

FONT: [37].

El concepte d'homologia emana de l'*ordre de connectivitat* estudiat per Riemann i Betti. L'ordre de connectivitat d'una superfície S , segons Riemann, és el nombre màxim de talls que s'hi poden fer sense que S quedi desconnectada. «Fer un tall» significa suprimir una corba dins S que no tingui interseccions amb ella mateixa i que sigui una corba tancada o bé comenci i acabi en punts de la vora de S .

Per exemple, l'ordre de connectivitat de la superfície d'un tor a l'espai tridimensional és 2, ja que amb dos talls successius un tor es converteix en un quadrat, que és *simplement connex*, és a dir, que se separa necessàriament en dues parts si s'hi fa qualsevol tall. De fet, Riemann sumava 1 a aquests nombres, de manera que una esfera era 1-connexa, un tor era

3-connex i, més generalment, l'ordre de connectivitat d'una superfície tancada orientable S era $2g + 1$, on g s'anomena el *gènere* de S .

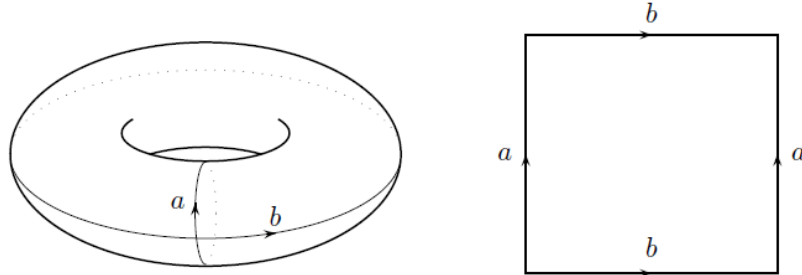


FIGURA 2. La superfície d'un tor esdevé simplement connexa amb dos talls.

FONT: Elaboració pròpia.

Riemann va observar que el gènere d'una superfície S coincidia amb el nombre màxim de talls al llarg de corbes tancades *disjunes* que es podien fer a S sense desconnectar-la. En aquesta afirmació és essencial que les corbes siguin disjunes, i aquesta idea la va reprendre Betti per generalitzar l'ordre de connectivitat a varietats tridimensionals mitjançant talls fets amb corbes tancades disjunes o bé amb superfícies tancades disjunes.

1.1. Homologies

Poincaré va definir *homologies* en l'*Analysis situs* de la manera següent. Donada una varietat V de dimensió d , escrivia $C_1 + \dots + C_n \sim 0$ si existia una subvarietat M de dimensió $q \leq d$ tal que la vora ∂M estigués formada per n varietats C_1, \dots, C_n de dimensió $q - 1$. D'una manera més general, considerava homologies amb coeficients enters, amb l'observació que s'hi podia operar com si fossin equacions:

$$k_1 C_1 + \dots + k_r C_r \sim k_{r+1} C_{r+1} + \dots + k_s C_s,$$

on els signes negatius en els enters k_1, \dots, k_s , si n'hi havia, indicaven una inversió de l'orientació. Per exemple, si la superfície d'un tor es representa com un quadrat amb els costats identificats per parells tal com mostra la

figura 3, llavors les corbes C_1 , C_2 i C_3 representades en la figura es relacionen mitjançant l'homologia $C_3 \sim 2C_1 + C_2$.

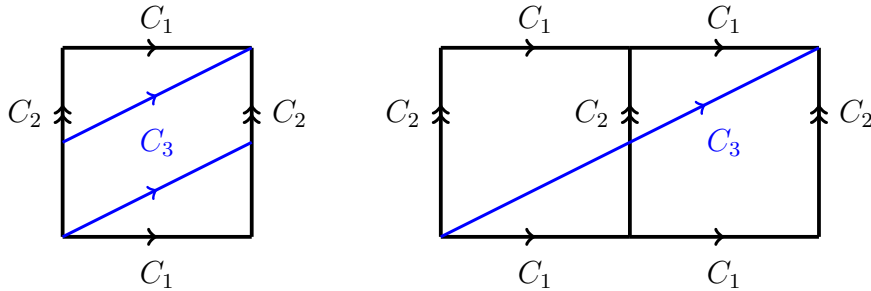


FIGURA 3. Homologia $C_3 \sim 2C_1 + C_2$ en un tor.

FONT: Elaboració pròpia.

Una família de subvarietats C_1, \dots, C_n de V , totes de la mateixa dimensió, són linealment independents, segons Poincaré, si no estan relacionades per cap homologia amb coeficients enters. En els casos en què existeixen $P_m - 1$ varietats tancades de dimensió m linealment independents dins de V i no n'hi ha P_m , Poincaré va anomenar P_m el *nombre de Betti* m -èsim de V . Definit així, els dos primers nombres de Betti de l'interior d'una esfera tridimensional són $P_1 = 1$ i $P_2 = 1$, mentre que els de l'interior d'un tor són $P_1 = 2$ i $P_2 = 1$. Poincaré només considerava els nombres P_1, \dots, P_{d-1} en una varietat de dimensió d . Els seus nombres de Betti concorden amb els ordres de connectivitat de Riemann i són una unitat més grans que els que utilitzem actualment.

En la superfície d'un tor les corbes C_1 i C_2 de les figures 3 i 4 estan relacionades per una homologia $C_1 + C_2 - C_1 - C_2 \sim 0$, que se simplifica a $0 \sim 0$ i, per tant, C_1 i C_2 són linealment independents, la qual cosa implica que $P_1 = 3$. En canvi, en una ampolla de Klein hi ha una homologia $C_1 + C_2 - C_1 + C_2 \sim 0$, tal com es mostra en la figura 4, que se simplifica a $2C_2 \sim 0$. Com que aquesta relació no és trivial, resulta que $P_1 = 2$ en l'ampolla de Klein.

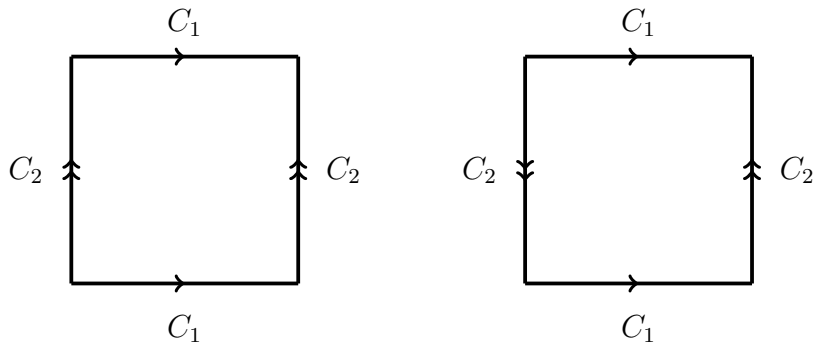


FIGURA 4. Homologies $C_1 + C_2 - C_1 - C_2 \sim 0$ en un tor (esquerra) i $C_1 + C_2 - C_1 + C_2 \sim 0$ en una ampolla de Klein (dreta).

FONT: Elaboració pròpia.

Poincaré no distingia entre $2C_2 \sim 0$ i $C_2 \sim 0$. Tanmateix, va escriure fins a cinc suplementes de l'*Analysis situs*, afegint-hi detalls i corregint-hi errades. Va introduir els *coeficients de torsió* en el segon suplement, en investigar si n'hi havia prou amb els nombres de Betti per caracteritzar les varietats llevat del que ell va anomenar *homeomorfisme*, terme que es referia, en paraules seves, a varietats «de la mateixa forma». Els coeficients de torsió apareixen en el cas de les superfícies no orientables, que contenen subvarietats amb torsió com la cinta de Möbius, estudiada anys abans per Ferdinand Möbius (1790-1868).

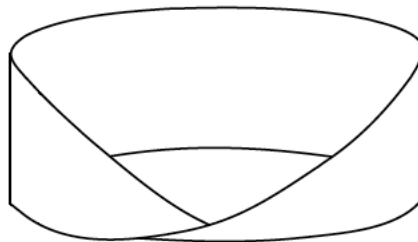


FIGURA 5. Cinta de Möbius.

FONT: Elaboració pròpia.

1.2. Conjectura de Poincaré

Els nombres de Betti i els coeficients de torsió determinen completament les superfícies tancades, tal com es demostra en els cursos bàsics de topologia a les universitats. Tanmateix, no n'hi ha prou amb els nombres de Betti i els coeficients de torsió per caracteritzar les varietats de dimensió superior a 2. En el segon suplement a l'*Analysis situs*, Poincaré va conjecturar, erròniament, que l'esfera S^3 de dimensió 3 era l'única varietat tancada de dimensió 3 amb nombres de Betti iguals a 1 i sense coeficients de torsió.

Ell mateix va construir, en el cinquè suplement, un contraexemple que es coneix com a *esfera de Poincaré*. Ho va fer unint de manera adient dues varietats tridimensionals limitades per superfícies orientables de gènere 2, tal com es detalla a [29]. L'esfera de Poincaré també es pot construir identificant les cares oposades de la vora d'un dodecèdre regular fent-hi un gir de 36° , tal com es mostra a la figura 6. Encara una altra manera de definir-la és com un quocient de l'esfera tridimensional sota una acció lliure del grup binari de l'icosàedre $SL(2, 5)$, que és un grup finit de 120 elements. Com que S^3 és simplement connexa, $SL(2, 5)$ és el grup fonamental del quocient de S^3 sota aquesta acció, i el fet que $SL(2, 5)$ no sigui el grup trivial implica que l'esfera de Poincaré no és homeomorfa a S^3 .

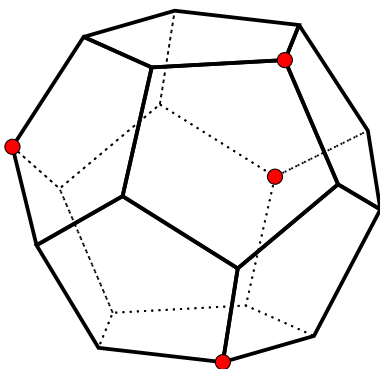


FIGURA 6. Esfera de Poincaré, obtinguda identificant les cares oposades de la vora d'un dodecèdre regular.

FONT: Elaboració pròpia.

Una varietat tancada de dimensió 3 simplement connexa ha de tenir necessàriament els mateixos nombres de Betti que l'esfera S^3 . Aquest fet es dedueix del teorema de dualitat demostrat per Poincaré: per a una varietat tancada orientable, els nombres de Betti que equidisten del principi i del final de la successió són iguals; és a dir, $P_k = P_{d-k}$ si la varietat té dimensió d , on $k \in \{1, \dots, d-1\}$. Per a una varietat tancada de dimensió 3 simplement connexa, és $P_1 = 1$ i aleshores també $P_2 = 1$ per dualitat.

Motivat per aquest fet, Poincaré va plantejar l'any 1904 la famosa pregunta de si l'esfera S^3 era l'única varietat tancada tridimensional simplement connexa. Ell ja no va fer més contribucions a aquest problema i va deixar escrit que «ens portaria massa lluny». La conjectura de Poincaré la va resoldre afirmativament Grigori Perelman (1966-) l'any 2003, gairebé cent anys després de la seva formulació. La demostració de Perelman no va venir de la topologia, sinó de la geometria diferencial: estava basada en l'estratègia de Richard Hamilton (1943-) de difusió de la curvatura de Ricci en varietats amb mètriques de Riemann. Fins avui, la conjectura de Poincaré és l'únic dels set problemes del mil·lenni, enunciats el 24 de maig de l'any 2000 per l'Institut Clay [32], que ha estat resolt.

1.3. Grup fonamental segons Poincaré

Poincaré va definir el grup fonamental d'una varietat V mitjançant substitucions de variables en funcions multiformes obtingudes com a solucions d'equacions diferencials lineals a V . Aquestes substitucions de variables es produïen en recórrer camins tancats al voltant de singularitats. Per exemple, si s'integra la 1-forma diferencial $d\theta$ al llarg d'un camí tancat amb origen i final un punt d'una circumferència, on θ representa l'angle, s'obté una translació que és un múltiple de 2π , ja que la funció θ és multiforme.

Si recorrem la vora del quadrat representat en la figura 3, en resulten dues translacions T_1 i T_2 en el pla complex, corresponents a les corbes C_1 i C_2 , lligades per la relació $T_1 + T_2 \equiv T_2 + T_1$. Aquesta relació representa el grup fonamental del tor segons Poincaré. Amb notació actual, els generadors a i b del grup fonamental del tor satisfan la relació $aba^{-1}b^{-1} = 1$, escrita multiplicativament.

Aquest és, en un cert sentit, un refinament del concepte d'homologia, ja que Poincaré considerava expressions

$$k_1T_1 + \dots + k_rT_r \equiv k_{r+1}T_{r+1} + \dots + k_sT_s$$

semblants a les homologies, però on la suma no era commutativa.

Donada una superfície V , després de tallar-la de manera que s'obtingui una superfície S simplement connexa amb vora, es pot reconstruir V unint, per parells, les arestes de la vora de S . Els generadors del grup fonamental de V corresponen a aquests parells d'arestes i la relació entre els generadors s'obté seguint un camí tancat al llarg de la vora de S . En varietats de dimensió més gran que 2, s'obté una presentació del grup fonamental amb el mateix procediment, però amb més d'una relació: n'hi haurà tantes com cicles d'arestes independents. Poincaré anomenava aquestes relacions *equivalències fonamentals*, i va adonar-se que, si es deixava de tenir en compte l'ordre de les arestes, llavors les equivalències fonamentals esdevenien homologies i per tant determinaven el primer nombre de Betti.

Aquesta és una de les maneres com s'ensenya a calcular grups fonamentals de superfícies, però no és la manera com es defineix el grup fonamental. En l'apartat següent el definirem tal com es fa actualment.

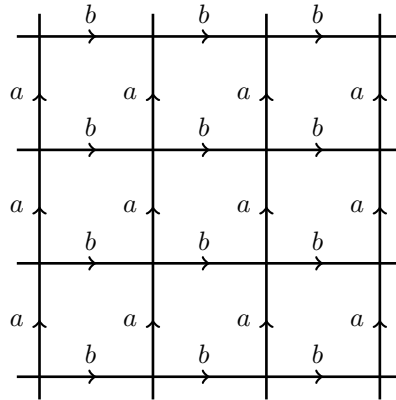


FIGURA 7. Tessel·lació del pla complex en regions fonamentals d'una acció del grup fonamental del tor $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$.

FONT: Elaboració pròpia.

2. DEFINICIONS ACTUALS

Poincaré treballava amb varietats, que definia com conjunts de punts d'un espai euclidià que satisfessin una família d'equacions i de desigualtats. Per exemple, l'interior d'una esfera ve donat per $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ i la seva vora per $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

En la dècada de 1910 ja es definia un *espai topològic* com un conjunt X dotat d'una topologia \mathcal{T} . Una *topologia* en un conjunt X és una família de subconjunts de X que conté el conjunt buit i X , i és tancada per unions arbitràries i per interseccions finites. Els elements de \mathcal{T} s'anomenen *oberts* i els seus complements s'anomenen *tancats*.

Aquesta axiomatització va proposar-la Felix Hausdorff (1868-1942) en el seu llibre *Grundzüge der Mengenlehre* [18] l'any 1914. El refinament posterior inclou contribucions de diversos autors, principalment Kazimierz Kuratowski (1896-1980) i Luitzen Brouwer (1881-1966).

2.1. Homeomorfismes

Una aplicació $f: X \rightarrow Y$ entre espais topològics és *contínua*, per definició, si l'antiimatge $f^{-1}(U)$ de qualsevol obert U de Y és un obert de X .

Un *homeomorfisme* de X a Y és una aplicació contínua $f: X \rightarrow Y$ que és bijectiva i contínua i tal que la seva inversa $f^{-1}: Y \rightarrow X$ també és contínua. L'homeomorfa és una relació d'equivalència i, si existeix algun homeomorfisme entre X i Y , es diu que X i Y són *homeomorfs*. En topologia, els espais que són homeomorfs entre ells es tracten com si fossin iguals, com per exemple un cub i una esfera (figura 8).

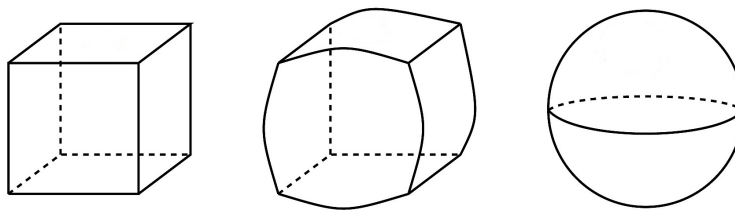


FIGURA 8. Homeomorfisme entre un cub i una esfera.

FONT: Elaboració pròpia.

2.2. Grup fonamental

El grup fonamental d'un espai topològic X en un punt base $x_0 \in X$ és denotat per $\pi_1(X, x_0)$ i es defineix com el conjunt de classes d'homotopia de llaços en x_0 , on un llaç en x_0 és una aplicació contínua $\sigma: [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$. Dos llaços σ_0 i σ_1 són *homòtops* si existeix alguna aplicació contínua $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que $H(0, s) = \sigma_0(s)$, $H(1, s) = \sigma_1(s)$ i $H(t, 0) = H(t, 1) = x_0$ per a tot t (és a dir, l'homotopia és estacionària en el punt base x_0). L'operació de grup a $\pi_1(X, x_0)$ correspon a la concatenació de llaços, on la concatenació $\sigma * \omega$ es defineix com $(\sigma * \omega)(t) = 2t$ si $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ i $(\sigma * \omega)(t) = 2t - 1$ si $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.

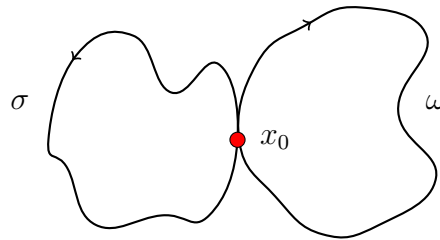


FIGURA 9. Concatenació de llaços en un espai amb punt base.

FONT: Elaboració pròpia.

El grup fonamental detecta els *forats* en un domini del pla \mathbb{R}^2 . Per exemple, en el pla \mathbb{R}^2 menys l'origen $(0, 0)$ un llaç σ en $x_0 = (1, 0)$ que dona una volta a $(0, 0)$ no és pas homòtop al camí constant en x_0 , i és un generador del grup fonamental de \mathbb{R}^2 menys l'origen, ja que qualsevol altre llaç en x_0 és homòtop a alguna potència de σ o bé de σ recorregut en sentit contrari.

Un espai topològic X és *simplement connex* si és arc-connex i el seu grup fonamental és trivial en tot punt. Els dominis U simplement connexos en espais euclidians tenen la propietat, entre d'altres, que tota 1-forma diferencial tancada en U és exacta, és a dir, si $\omega = \omega_1 dx_1 + \dots + \omega_n dx_n$ és tal que $d\omega = 0$, llavors existeix una funció f definida a U tal que $\omega = df$. Aquest resultat es coneix com a *lema de Poincaré* i és molt rellevant en l'estudi de les equacions diferencials en el pla o, més generalment, en varietats diferenciables.

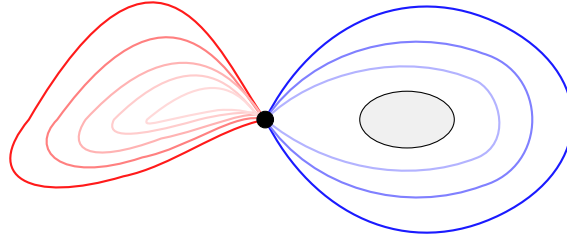


FIGURA 10. Homotopies de llaços amb el punt base fixat: els llaços vermells són homòtops al llaç constant en el punt base, però els llaços blaus no ho són.

FONT: Elaboració pròpia.

El concepte d'homotopia (deformació contínua, no necessàriament reversible) entre dues aplicacions contínues estava implícit en l'estudi que va fer Poincaré del grup fonamental d'una varietat, però ell no va utilitzar aquest nom. El nom *homotopia* va aparèixer en un article d'Oswald Veblen (1880-1960) l'any 1905 i també en un article de Max Dehn (1878-1952) i Poul Heegard (1871-1948) publicat el 1907. L'any 1912, Brouwer va donar-ne una definició formal amb el mateix significat que té actualment: una *homotopia* entre dues aplicacions contínues $f_0: X \rightarrow Y$ i $f_1: X \rightarrow Y$ entre espais topològics és una aplicació contínua $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f_0(x)$ i $H(x, 1) = f_1(x)$. Una altra manera de dir el mateix és que hi ha una família uniparamètrica $\{H_t\}$ d'aplicacions contínues, indexada per $0 \leq t \leq 1$ i que varia amb continuïtat, tal que $H_0 = f_0$ i $H_1 = f_1$.

2.3. Equivalències homotòpiques

Una aplicació contínua $f: X \rightarrow Y$ és una *equivalència homotòpica* si hi ha una altra aplicació contínua $g: Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f$ és homòtopa a la identitat de X i $f \circ g$ és homòtopa a la identitat de Y . Per motivar millor aquesta definició, convé esmentar el fet que una aplicació contínua $f: X \rightarrow Y$ és un homeomorfisme si i només si existeix una aplicació contínua $g: Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f$ és igual a la identitat de X i $f \circ g$ és igual a

la identitat de Y . Per tant, la noció d'equivalència homotòpica és més feble que la noció d'homeomorfisme, ja que canviem igualtats per homotopies.

Els homeomorfismes són les *equivalències topològiques*, en el sentit que si hi ha un homeomorfisme entre dos espais aleshores aquests dos espais es tracten com si fossin un mateix espai a tots els efectes. Per aquest motiu, l'estudi homotòpic dels espais és un refinament de l'estudi topològic: la teoria d'homotopia estudia les propietats dels espais topològics que són invariants per equivalència homotòpica.

Tanmateix, és un refinament molt justificat, ja que tots els invariants algebraics d'espais que es van anar descobrint durant el segle xx són invariants homotòpics. El grup fonamental n'és un exemple: si dos espais X i Y són homotòpicament equivalents, llavors $\pi_1(X, x_0)$ és isomorf a $\pi_1(Y, y_0)$, on $y_0 = f(x_0)$, si $f: X \rightarrow Y$ és una equivalència homotòpica. Els grups d'homologia singular, que definirem en l'apartat 3.1, en són un altre exemple, i els grups d'homotopia superiors també són invariants homotòpics.

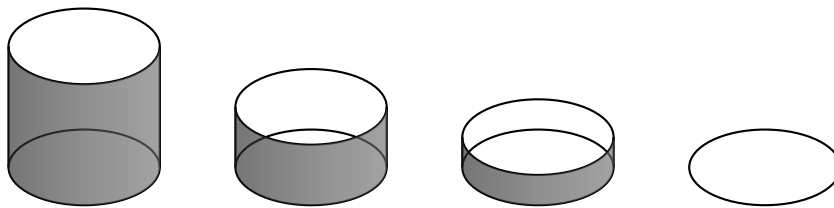


FIGURA 11. El cilindre de l'esquerra és homotòpicament equivalent, però no homeomorf, a la circumferència de la dreta.

FONT: Elaboració pròpia.

3. GRUPS D'HOMOLOGIA

La versió d'homologia més senzilla de formalitzar és la dels complexos simplicials. Un *complex simplicial* és un espai topològic format per símplexs (vèrtexs, arestes, triangles, tetràedres, etc.) units de manera que la intersecció de dos símplexs sigui un símplex de dimensió inferior o bé sigui buida. Una manera escaient de treballar amb complexos simplicials és representar-los de manera abstracta com conjunts de subconjunts finits

d'una col·lecció de punts donats en un espai euclidià. Per exemple, un tetràedre format per quatre punts p_0, p_1, p_2, p_3 té quatre cares, que poden ser denotades simplificadament per $(012), (013), (023), (123)$, i sis arestes $(01), (02), (03), (12), (13), (23)$, a més dels vèrtexs $(0), (1), (2), (3)$ i la cara tridimensional (0123) .

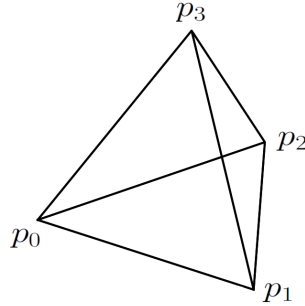


FIGURA 12. Un 3-símplex (tetràedre) té 4 vèrtexs, 6 arestes, 4 cares bidimensionals i una cara tridimensional.

FONT: Elaboració pròpia.

Si en comptes de considerar només un símplex tenim un complex simplicial finit K , comencem escollint un ordre en el conjunt de vèrtexs de K . Llavors es defineix, per a cada enter $n \geq 0$, el *grup de n-cadenes* $C_n(K)$ com el grup abelià lliure generat pels símplexs n -dimensionals de K , i es defineixen els *operadors vora* com

$$\partial_n(012 \dots n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (01 \dots (i-1)(i+1) \dots n),$$

on s'ha suprimit i , i anàlogament si canviem $(012 \dots n)$ per la successió ordenada dels vèrtexs de qualsevol símplex. Els operadors vora són morfismes de grups i tenen la propietat que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ per a tot n , gràcies a l'elecció que hem fet dels signes. Per exemple,

$$\begin{aligned} \partial_1(\partial_2(012)) &= \partial_1((12) - (02) + (01)) \\ &= (2) - (1) - (2) + (0) + (1) - (0) = 0. \end{aligned}$$

Aleshores la imatge de ∂_{n+1} està continguda en el nucli de ∂_n i el grup d'homologia n -èsim de K es defineix per a $n \geq 0$ com

$$H_n(K) = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1},$$

on $\text{Ker } \partial_n = \{c \in C_n(X) \mid \partial_n c = 0\}$ és el nucli de ∂_n .

- a) El rang de $H_0(K)$ és igual al nombre de components connexes de K .
- b) Els elements no trivials de $H_1(K)$ representen cicles d'arestes a K que no són vora de cap subcomplex de K de dimensió 2.
- c) Més en general, els elements no trivials de $H_n(K)$ representen cavitats n -dimensionals a K que no són vora de cap subcomplex de K de dimensió $n + 1$.

Va ser Emmy Noether (1882-1935) que va saber veure, l'any 1926, que l'homologia era una successió de grups abelians. D'aquesta manera, els nombres de Betti i els coeficients de torsió de Poincaré es van reinterpretar com els rangs de la part lliure i els ordres dels sumands finits d'aquests grups abelians, en cas que fossin finitament generats.



FIGURA 13. Emmy Noether (1882-1935).

FONT: [38].

La suma alternada dels nombres de Betti d'un complex simplicial finit K s'anomena *característica d'Euler* de K i coincideix amb la suma alternada dels nombres de símplexs en cada dimensió. Per exemple, la superfície d'un tetràedre és homeomorfa a una esfera S^2 i té nombres de Betti (en notació actual) $\beta_0 = 1, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1$, de manera que la seva característica d'Euler és $\chi = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 = 1 - 0 + 1 = 2$, que coincideix amb la suma alternada $4 - 6 + 4 = 2$ dels nombres de símplexs del tetràedre.

3.1. Homologia singular

La teoria d'homologia s'estén a espais topològics arbitraris, no necessàriament complexos simplicials, mitjançant els anomenats *símplexs singulars*, que són aplicacions contínues $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$, on X és un espai topològic qualsevol i Δ^n és el *n -símplex estàndard*, que té per vèrtexs els punts unitat dels eixos de coordenades de \mathbb{R}^{n+1} . Per exemple, Δ^2 és el triangle que té per vèrtexs $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ i $(0, 0, 1)$ a \mathbb{R}^3 .

El *grup de cadenes singulars* n -èsim és el grup abelià lliure $S_n(X)$ generat pels n -símplexs singulars a X . Els símplexs estàndard es relacionen entre ells amb inclusions $d_n^i: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$, on $0 \leq i \leq n$, representades a la figura 14, i aquestes inclusions donen lloc als operadors vora $\partial_n: S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$, que es defineixen com

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma \circ d_n^i).$$

Aquests operadors vora també satisfan la relació $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ i per tant defineixen grups abelians $H_n(X) = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$.

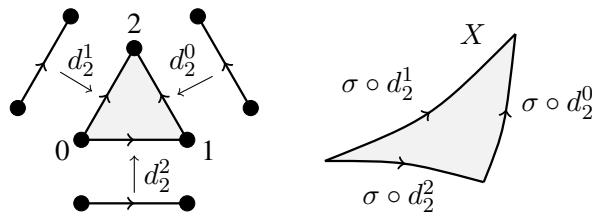


FIGURA 14. Components de la vora d'un 2-símplex singular σ en un espai X .

FONT: Elaboració pròpia.

A més de Noether, van contribuir a desenvolupar la teoria d'homologia Leopold Vietoris (1891-2002) i Walther Mayer (1887-1948), entre d'altres. La definició del terme *homologia singular* la va donar Solomon Lefschetz (1884-1972) l'any 1933 i la va perfeccionar Samuel Eilenberg (1913-1998).

En la dècada de 1940 es va demostrar que els grups d'homologia singular d'un complex simplicial X coincidien amb els grups d'homologia simplicial de X . Aquesta demostració es va obtenir mitjançant l'axiomàtica d'Eilenberg i Steenrod, que comentarem en l'apartat 5.1.

4. GRUPS D'HOMOTOPIA

Les generalitzacions del grup fonamental a dimensions superiors no són els grups d'homologia, sinó els *grups d'homotopia* $\pi_n(X, x_0)$ amb punt base x_0 per a tot $n \geq 1$, on $\pi_1(X, x_0)$ és el grup fonamental. Es defineix $\pi_n(X, x_0)$ com el conjunt $[S^n, X]$ de classes d'homotopia d'aplicacions contínues $f: S^n \rightarrow X$ que envien el punt base $(1, 0, \dots, 0)$ de S^n al punt base x_0 de X , i on les homotopies són estacionàries en el punt base.

L'operació de suma a $[S^n, X]$ prové del fet que S^n es pot pensar com un cub de dimensió n on s'identifica tota la vora del cub en un únic punt, i dues aplicacions contínues definides en cubs i que són constants en les vores d'aquests cubs es poden concatenar de manera anàloga a com es concatenen camins per definir el grup fonamental.

Els grups $\pi_n(X, x_0)$ són, de fet, grups abelians quan $n \geq 2$, degut a la flexibilitat de moviment que es té en esferes de dimensions superiors a 1 per intercanviar les posicions dels sumands, tal com s'il·lustra en la figura 15.

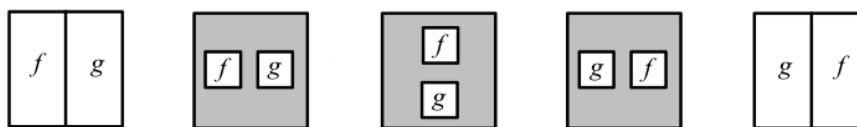


FIGURA 15. L'operació de suma en els grups d'homotopia $\pi_n(X, x_0)$ és commutativa si $n \geq 2$.

FONT: Elaboració pròpia.

4.1. Teorema de Hurewicz

És natural preguntar-se quina relació hi ha entre els grups d'homotopia $\pi_n(X, x_0)$ i els grups d'homologia $H_n(X)$. Per a $n = 1$, el grup abelià $H_1(X)$ és el quocient abelià més gran del grup fonamental $\pi_1(X, x_0)$ per a qualsevol elecció de x_0 , suposant que X sigui arc-connex. Per a $n \geq 2$, la relació entre $\pi_n(X, x_0)$ i $H_n(X)$ és un problema difícil, al qual es van anar fent moltes contribucions al llarg de la història.

El primer gran resultat el va obtenir Witold Hurewicz (1904-1956) en demostrar el 1935 que si $\pi_n(X, x_0)$ s'anul·la per a $n \leq k$ (on $k \geq 1$), llavors $\pi_{k+1}(X, x_0) \cong H_{k+1}(X)$; però més enllà de $k + 1$ ja no es pot afirmar pràcticament res que sigui sempre vàlid.

La definició dels grups d'homotopia s'acostuma a atribuir a Hurewicz en el seu treball *Beiträge zur Topologie der Deformationen* [19], publicat el 1935 en quatre parts. Tanmateix, els grups d'homotopia havien estat presentats amb anterioritat per Eduard Čech (1893-1960) en el Congrés Internacional de Matemàtiques de 1932, tot i que no els va arribar a estudiar amb detall, degut al fet que eren grups abelians per a $n \geq 2$ i (ben equivocadament) no s'esperava que aportessin informació addicional a la donada pels grups d'homologia.

4.2. Teorema de Whitehead

Els grups d'homotopia d'un espai X tenen una propietat molt important: si es consideren conjuntament, contenen prou informació per recuperar el tipus homotòpic de X , però en un sentit feble que s'explica a continuació. Un enunciat més fort haurà d'esperar a la formulació de la hipòtesi d'homotopia de Grothendieck i, de fet, a la teoria de categories d'ordre infinit que es presentarà més endavant en aquesta exposició.

A partir de 1950 es va estendre l'ús dels *CW-complexos* com la mena d'espais més útils per treballar en topologia algebraica. Es tracta d'espais que s'obtenen adjuntant cel·les en dimensions successives i generalitzen els complexos simplicials. L'homologia dels CW-complexos és fàcil de calcular en la majoria de casos. Henry Whitehead (1904-1960) va introduir-los entre 1940 i 1950 i va demostrar que si X i Y són dos CW-complexos

arc-connexos i una aplicació contínua $f: X \rightarrow Y$ indueix isomorfismes $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(Y, y_0)$ per a tot $n \geq 1$, llavors f és una equivalència homotòpica i, per tant, X i Y són homotòpicament equivalents.



FIGURA 16. John Henry Constantine Whitehead (1904-1960).

FONT: [39].

No és pas cert que tots els espais topològics siguin CW-complexos, però sí que és cert que per a tot espai X hi ha un CW-complex K i una aplicació contínua $K \rightarrow X$ que indueix isomorfismes en tots els grups d'homotopia. Aquest resultat s'anomena *teorema d'aproximació cel·lular* i ha estat molt rellevant en la història de la topologia algebraica, no només per motius pràctics, sinó també teòrics.

5. AXIOMATITZACIÓ DE L'HOMOLOGIA

En la dècada de 1940 ja era coneguda l'homologia singular i també s'havia demostrat que la cohomologia de formes diferencials en una varietat diferenciable coincidia amb la cohomologia singular amb coeficients a \mathbb{R} . La *cohomologia singular* d'un espai X amb coeficients a \mathbb{R} es defineix mitjançant el complex dual (en el sentit dels espais vectorials) del complex de cadenes singulars de X . L'espai vectorial dual de $S_n(X; \mathbb{R})$ és denotat

per $S^n(X; \mathbb{R})$ i els seus elements s'anomenen *n-cocadenes singulars*. Podem pensar, doncs, una *n-cocadena* com una funció que assigna un nombre real a cada *n*-símplex singular de X .

La *cohomologia de De Rham* *n*-èsima d'una varietat diferenciable M és el quocient de l'espai vectorial de les *n*-formes diferencials tancades a M (és a dir, tals que $d\omega = 0$) pel subespai de les *n*-formes diferencials exactes (tals que $\omega = d\eta$ per a alguna η). Aquesta cohomologia proporciona informació molt útil per a la discussió de les solucions d'equacions diferencials a M : s'anul·la precisament quan tota forma diferencial tancada és exacta, com en el cas del lema de Poincaré.

La cohomologia de De Rham *n*-èsima coincideix amb el nucli de l'operador laplaciana de Hodge a M en dimensió n , si suposem que s'ha donat una mètrica de Riemann a M . En el cas $n = 0$, el nucli del laplaciana és l'espai de les funcions harmòniques a M .

L'isomorfisme de la cohomologia de formes diferencials amb la cohomologia singular amb coeficients a \mathbb{R} va ser demostrat per Georges de Rham (1903-1990) l'any 1931. Aquest teorema va fer evident que la cohomologia de De Rham de M només depèn de la topologia de M i no pas de l'estructura diferenciable que s'hagi utilitzat per calcular-la.

5.1. Axiomes d'Eilenberg i Steenrod

Les analogies formals entre l'homologia simplicial, l'homologia o la cohomologia singular i la cohomologia de De Rham —per exemple, totes tres tenen associades successions exactes llargues de Mayer i Vietoris—, juntament amb altres descobriments com la cohomologia de Čech, definida mitjançant recobriments oberts dels espais, van motivar Samuel Eilenberg (1913-1998) i Norman Steenrod (1910-1971) a formular un conjunt d'axiomes que, com ells mateixos van demostrar, determinen unívocament l'homologia i la cohomologia dels complexos simplicials finits.

Amb més precisió, sigui donada una col·lecció de grups abelians $h_n(X)$ per a $n \geq 0$, associada a tot espai X , que satisfaci les condicions següents:

- a) Naturalitat, en el sentit que tota aplicació contínua $f: X \rightarrow Y$ induïx morfismes de grups $f_*: h_n(X) \rightarrow h_n(Y)$ per a tot $n \geq 0$ i, a més, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ i també $\text{id}_* = \text{id}$.

- b) Invariància homotòpica: dues aplicacions $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ homòtopes indueixen els mateixos morfismes $h_n(X) \rightarrow h_n(Y)$.
- c) Excisió: l'homologia relativa d'un parell format per un espai X i un subespai A no varia si es consideren els subespais $X \setminus U$ i $A \setminus U$, on U és un obert contingut a A .
- d) Exactitud, que relaciona mitjançant una successió exacta llarga els grups d'homologia $h_n(X, A)$ d'un parell amb $h_n(X)$ i $h_n(A)$.
- e) Axioma de la dimensió, segons el qual si $X = \{*\}$ és un únic punt, llavors $h_n(X) = 0$ si $n \neq 0$.

Aleshores $h_n(X)$ coincideix, per a $n \geq 0$, amb l'homologia simplicial $H_n(X; G)$ amb coeficients a $G = h_0(*)$ per a tot complex simplicial finit X .

Eilenberg i Steenrod van demostrar, a més, que la identificació entre $h_n(X)$ i $H_n(X; G)$ és *natural*, és a dir, compatible amb aplicacions contínues $f: X \rightarrow Y$. De fet, aquesta naturalitat és la clau de la demostració de l'isomorfisme $h_n(X) \cong H_n(X; G)$, que parteix de $h_0(*) \cong H_0(*; G)$ i es va estenent a tot X i per a tot n utilitzant els axiomes.

El darrer axioma, que imposa que l'homologia d'un punt estigui concentrada en grau zero, és essencial per caracteritzar l'homologia ordinària. Però es pot eliminar aquest axioma i s'obtenen, amb els altres axiomes, les anomenades *teories d'homologia generalitzades*, com la teoria K , el cobordisme i altres homologies que comentarem en l'apartat 7.

6. TEORIA DE CATEGORIES

La teoria de categories és una branca de les matemàtiques que va néixer de la topologia algebraica i que s'ha estès a molts altres àmbits, principalment a l'àlgebra, la geometria i la física teòrica. Va sorgir com una formalització del concepte de naturalitat en matemàtiques, no pas vist com una expressió col·loquial, sinó en el sentit del que avui s'anomena *functorialitat*, prou justificada pel seu ús en l'axiomàtica d'Eilenberg i Steenrod.

Una *categoria* \mathcal{C} , tal com la van definir Samuel Eilenberg i Saunders Mac Lane (1909-2005), consta d'una col·lecció d'objectes i, per a cada parell d'objectes X i Y , un conjunt de morfismes $\mathcal{C}(X, Y)$ amb una operació

de composició $\mathcal{C}(Y, Z) \times \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)$ que és associativa i té identitats $\text{id}_X \in \mathcal{C}(X, X)$ per a tot objecte X .

Per exemple, la categoria dels espais topològics té per objectes els espais topològics i per morfismes, les aplicacions contínues; la categoria de les varietats diferenciables té per objectes les varietats diferenciables i per morfismes, les aplicacions de classe C^∞ , i la categoria dels grups té per objectes els grups i per morfismes, els morfismes de grups. Més en general, qualsevol estructura algebraica defineix una categoria en què els objectes tenen l'estructura donada i els morfismes conserven aquesta estructura.



FIGURA 17. Saunders Mac Lane (1909-2005) (esquerra) i Samuel Eilenberg (1913-1998) (dreta) l'any 1992.

FONT: [40].

Un *functor* $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre dues categories assigna a cada objecte X de \mathcal{C} un objecte FX de \mathcal{D} i a cada morfisme $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ un morfisme $Ff \in \mathcal{D}(FX, FY)$, de manera que $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$ i també

$F(\text{id}_X) = \text{id}_{FX}$ per a tot X . Amb aquest llenguatge, la condició de naturalitat imposada a les teories d'homologia es tradueix en el fet que cada h_n és un functor de la categoria dels espais topològics i les aplicacions contínues a la categoria dels grups abelians i els seus morfismes. De fet, l'axioma de la dimensió d'Eilenberg i Steenrod permet que en comptes de grups abelians es considerin mòduls sobre un anell o espais vectorials sobre un cos.

Si \mathcal{C} i \mathcal{D} són categories, llavors els functors $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es poden prendre com a objectes d'una nova categoria $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, els morfismes de la qual s'anomenen *transformacions naturals* de functors. Una transformació natural $\eta: F \rightarrow G$ és una família de morfismes $\eta_X: FX \rightarrow GX$ a \mathcal{D} , un per a cada objecte X de \mathcal{C} , amb la propietat que $Gf \circ \eta_X = \eta_Y \circ Ff$ per a cada morfisme $f: X \rightarrow Y$ a \mathcal{C} .

$$\begin{array}{ccc}
 X & & FX \xrightarrow{\eta_X} GX \\
 \downarrow f & & \downarrow Ff \quad \downarrow Gf \\
 Y & & FY \xrightarrow{\eta_Y} GY
 \end{array}$$

FIGURA 18. Transformació natural de functors $\eta: F \rightarrow G$.

FONT: Elaboració pròpia.

En un cert sentit, les categories formen elles mateixes una categoria que té morfismes (els functors) i morfismes entre morfismes (les transformacions naturals). No hi ha res que ens obligui a aturar-nos, i podem considerar morfismes entre morfismes entre morfismes, etc. Aquesta idea, que sembla abstracta i especulativa, va donar lloc a una nova teoria d'homotopia d'ordre superior sis dècades després de la introducció de les categories a càrrec d'Eilenberg i Mac Lane.

7. HOMOTOPIA DE LES ESFERES

En la seva tesi doctoral, defensada el 1951, Jean-Pierre Serre (1926-) va canviar el panorama de la teoria d'homotopia amb el seu estudi dels grups d'homotopia de les esferes. Amb la successió espectral que porta

el seu nom, que provenia de treballs previs de Jean Leray (1906-1998), va demostrar que els grups $\pi_k(S^n)$ són grups abelians finits, excepte quan $k = n$ per a tot n o bé $k = 2n - 1$ si n és parell.

La successió espectral de Serre existeix sempre que es tingui una *fibració* d'espais topològics [28], com la fibració de Hopf, descoberta el 1931 per Heinz Hopf (1894-1971), que és una aplicació exhaustiva $S^3 \rightarrow S^2$ on totes les antiimatges dels punts són homeomorfes a S^1 ; és a dir, S^3 es pot *fibrar* mitjançant circumferències parametritzades pels punts de S^2 i enllaçades entre elles (figura 19). Aquesta fibració s'acostuma a representar mitjançant l'expressió $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$.

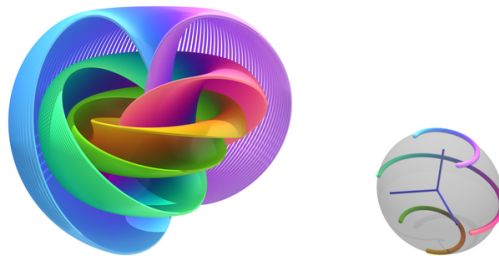


FIGURA 19. Fibració de Hopf de l'esfera S^3 amb base S^2 .

FONT: [41].

La fibració de Hopf es pot pensar com la projecció de l'esfera unitat de \mathbb{C}^2 (que és S^3) en l'espai projectiu $\mathbb{C}P^1$, que és homeomorf a S^2 . Hi ha dues altres fibracions anàlogues: $S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4$ i $S^7 \rightarrow S^{15} \rightarrow S^8$. Les esferes S^1 , S^3 i S^7 que apareixen com a fibres d'aquestes fibracions són les úniques que admeten multiplicacions contínues: la multiplicació de S^1 prové del cos dels nombres complexos \mathbb{C} ; la de S^3 prové del cos (no commutatiu) dels quaternions de Hamilton \mathbb{H} , i la de S^7 prové de l'àlgebra de divisió \mathbb{O} dels octonions de Cayley, que no és ni commutativa ni associativa. Els espais que admeten multiplicacions contínues amb un element neutre es van denominar més tard *H-espais* o bé *espais de Hopf*.

Serre va tenir la idea molt innovadora de concentrar l'estudi dels grups $\pi_k(S^n)$ en cada nombre primer separatament. Si fixem un nombre primer p i considerem una aplicació contínua $p: S^n \rightarrow S^n$ que indueixi multiplicació per p en el grup d'homologia $H_n(S^n)$, aleshores aquesta aplicació induïx multiplicació per p en el grup d'homotopia n -èsim $[S^n, X] \rightarrow [S^n, X]$

si $n \geq 2$. Els espais X tals que aquest morfisme de grups abelians és un isomorfisme són els espais tals que el grup d'homotopia $\pi_n(X)$ és divisible per p amb unicitat; dit d'una altra manera, $\pi_n(X)$ és un mòdul sobre l'anell $\mathbb{Z}[1/p]$. Si en comptes d'invertir un nombre primer p s'inverteixen tots els primers $q \neq p$, llavors l'objecte d'estudi són els espais X tals que $\pi_n(X)$ és un mòdul sobre l'anell $\mathbb{Z}_{(p)}$ localitzat en l'ideal primer (p) . Els espais simplement connexos tals que tots els seus grups d'homotopia són mòduls sobre $\mathbb{Z}_{(p)}$ s'anomenen *espais p -locals*.

Aquesta tècnica de treballar en cada primer, anomenada *localització*, va servir de base per a la teoria de la localització homotòpica dues dècades després. Serre va utilitzar-la per demostrar que en els grups d'homotopia de qualsevol esfera S^n amb $n \geq 2$ hi ha elements de torsió de qualsevol ordre primer. La successió espectral de Serre, juntament amb el seu estudi del que avui s'anomenen *classes de Serre*, relaciona els grups d'homologia amb els grups d'homotopia dels espais simplement connexos de maneres molt més generals que el teorema de Hurewicz. Per exemple, els grups d'homologia dels espais p -locals són mòduls sobre $\mathbb{Z}_{(p)}$ com a conseqüència del fet que els seus grups d'homotopia també ho són.

7.1. Homotopia cromàtica

L'espai M obtingut adjuntant una $(n + 1)$ -cel·la a S^n mitjançant l'aplicació $p: S^n \rightarrow S^n$ s'anomena *cofibra* de p i és un *espai de Moore* de tipus $M(\mathbb{Z}/p, n)$, és a dir, un espai M tal que $H_n(M) \cong \mathbb{Z}/p$ i la resta de grups d'homologia són nuls en dimensions $n > 0$. Els espais de Moore van ser estudiats per primera vegada per John Moore (1923-2016). Si $p \geq 3$, aquest espai $M(\mathbb{Z}/p, n)$ admet una aplicació $v_1: \Sigma^{2p-2}M \rightarrow M$ definida el 1966 per Frank Adams (1930-1989) a [1], que indueix un isomorfisme en la teoria K mòdul p .

Més en general, hi ha una successió de teories d'homologia $K(n)_*$ localitzades en un primer p per a $n \geq 1$, on $K(1)_*$ és la teoria K mòdul p , juntament amb aplicacions estables v_n que indueixen isomorfismes en la teoria $K(n)_*$. Aquestes teories d'homologia van ser definides per Jack Morava (1944-) en la dècada de 1970. L'anell de coeficients de $K(n)_*$ és $(\mathbb{Z}/p)[v_n, v_n^{-1}]$, on v_n té grau $2p^n - 2$.

Aquesta família de teories d'homologia ha estat molt rellevant en topologia algebraica, ja que les localitzacions $L_n X$ respecte a $K(n)_*$ d'un espai X (o d'un espectre, en homotopia estable) formen un sistema invers, anomenat *torre cromàtica*, en el qual els grups d'homotopia van donant informació més i més fina sobre X . La torre cromàtica convergeix cap a X si X és un espectre finit p -local. En un cert sentit, després de la idea de Serre de separar la informació homotòpica en cada nombre primer, l'homotopia cromàtica separa encara més la informació en els nivells successius de la filtració cromàtica per a cada primer p .



FIGURA 20. John Frank Adams (1930-1989) (dreta) i Dieter Puppe (1930-2005) (centre) a Aarhus l'any 1962.

FONT: [42].

El concepte de localització respecte d'una teoria d'homologia, introduït per Adams i desenvolupat principalment per Aldridge Bousfield (1941-2020) i per Douglas Ravenel (1947-) en el seu llibre [24], és una generalització molt àmplia de la localització en un nombre primer p , que correspon al cas particular de l'homologia ordinària amb coeficients a l'anell $\mathbb{Z}_{(p)}$.

7.2. Homotopia estable

Els grups d'homologia són generalment senzills de calcular i, mitjançant successions espectrals adients, proporcionen informació valuosa —a vegades decisiva— sobre els grups d'homotopia, que són molt més difícils d'obtenir. La successió espectral d'Adams i Nóvikov, deguda a Adams i Serguei Nóvikov (1938-2024), parteix de la teoria d'homologia MU_* del cobordisme complex i convergeix als grups d'homotopia dels espectres connectius. L'espectre de les esferes n'és un cas particular.

La teoria d'homotopia estable estudia els *espectres* com a generalització dels espais topològics. És el context en què s'ha aconseguit, mitjançant successions espectrals basades en homologies generalitzades, abastar el càlcul de $\pi_k(S^n)$ per a valors molt grans de k i de n . La teoria d'homologia més rica en contingut que s'ha descobert fins ara és la de les *formes modulars topològiques*, construïda en els darrers anys del segle xx per Michael Hopkins (1958-) i Haynes Miller (1948-), juntament amb altres coautors.

Tanmateix, no s'ha aconseguit mai entendre l'estructura algebraica global subjacent en el conjunt dels grups d'homotopia de les esferes, si és que existeix aquesta estructura.

| | π_1 | π_2 | π_3 | π_4 | π_5 | π_6 | π_7 | π_8 | π_9 | π_{10} | π_{11} | π_{12} | π_{13} | π_{14} | π_{15} |
|-------|--------------|--------------|--------------|----------------|----------------|-------------------|-------------------------------------|-------------------|-------------------|---------------------------------------|-------------------|-------------------|---------------------------------------|---|---|
| S^0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| S^1 | \mathbb{Z} | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| S^2 | 0 | \mathbb{Z} | \mathbb{Z} | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_{12} | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_3 | \mathbb{Z}_{15} | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_2^2 | $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_{64} \times \mathbb{Z}_2^2$ | \mathbb{Z}_2^2 |
| S^3 | 0 | 0 | \mathbb{Z} | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_{12} | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_3 | \mathbb{Z}_{15} | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_2^2 | $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_{64} \times \mathbb{Z}_2^2$ | \mathbb{Z}_2^2 |
| S^4 | 0 | 0 | 0 | \mathbb{Z} | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_2 | $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$ | \mathbb{Z}_2^2 | \mathbb{Z}_2^2 | $\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_3$ | \mathbb{Z}_{15} | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_2^3 | $\mathbb{Z}_{120} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_{64} \times \mathbb{Z}_2^5$ |
| S^5 | 0 | 0 | 0 | 0 | \mathbb{Z} | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_{24} | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_{30} | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_2^3 | $\mathbb{Z}_{72} \times \mathbb{Z}_2$ |
| S^6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | \mathbb{Z} | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_{24} | 0 | \mathbb{Z} | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_{60} | $\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_2$ | \mathbb{Z}_2^3 |
| S^7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | \mathbb{Z} | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_{24} | 0 | 0 | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_{120} | \mathbb{Z}_2^3 |
| S^8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | \mathbb{Z} | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_2 | \mathbb{Z}_{24} | 0 | 0 | \mathbb{Z}_2 | $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{120}$ |

FIGURA 21. Grups d'homotopia de les esferes fins a $\pi_{15}(S^8)$.

FONT: [43].

8. HOMOTOPIA D'ORDRE SUPERIOR

La necessitat de considerar «homotopies entre homotopies» va sorgir per primer cop en la caracterització dels espais de llaços publicada per James Stasheff (1936-) a [30]. Donat un espai topològic X amb un punt base x_0 , el seu espai de llaços, que es denota amb ΩX , és l'espai topològic que té per elements els llaços a X en el punt x_0 , és a dir, les aplicacions contínues $\omega: [0, 1] \rightarrow X$ tals que $\omega(0) = \omega(1) = x_0$, amb la topologia compacta oberta —que té com a subbase els conjunts d'aplicacions que apliquen un compacte $K \subseteq [0, 1]$ arbitrari en un obert $U \subseteq X$ qualsevol.

En la dècada de 1960 s'estudiaven els espais topològics amb una multiplicació contínua $\mu: X \times X \rightarrow X$ i un element neutre que, com hem comentat en l'apartat anterior, s'anomenen *H-espais*. Els espais de llaços són H-espais, però no tot H-espai és un espai de llaços. La multiplicació en els espais de llaços és associativa llevat d'homotopia, és a dir, satisfà $\mu \circ (\text{id} \times \mu) \simeq \mu \circ (\mu \times \text{id})$. Per tant, l'associativitat llevat d'homotopia és una condició necessària que cal imposar a un H-espai per tal que sigui un espai de llaços.

Però aquesta condició encara no és suficient, perquè l'associativitat homotòpica en els espais de llaços satisfà condicions de coherència en totes les dimensions: la diversitat de maneres en què un producte d'elements admet parèntesis en un H-espai i la coherència de les homotopies entre totes les maneres de situar parèntesis van ser codificades per Stasheff amb uns poliedres anomenats *associaedres*. Per exemple, en el cas de quatre punts a, b, c, d d'un H-espai X , hi ha cinc maneres de posar parèntesis en el producte $abcd$:

$$((ab)c)d, \quad (a(bc))d, \quad a((bc)d), \quad a(b(cd)), \quad (ab)(cd).$$

El fet que aquestes cinc maneres, pensades com aplicacions contínues de $X \times X \times X \times X$ en X , siguin homòtopes de manera coherent s'expressa com l'existència d'una aplicació de l'associaedre de la imatge de l'esquerra en la figura 22 (un pentàgon) en X . El poliedre tridimensional de la dreta representa un associaedre de cinc elements.

La família dels associaedres K_n és infinita. Un espai X s'anomena de tipus A_∞ si hi ha aplicacions contínues $K_n \times X^n \rightarrow X$ per a $n \geq 0$ tals que

cadascuna estengui les anteriors —aquí X^n denota el producte $X \times \cdots \times X$ amb n factors i K_n és un punt si $n \leq 2$.

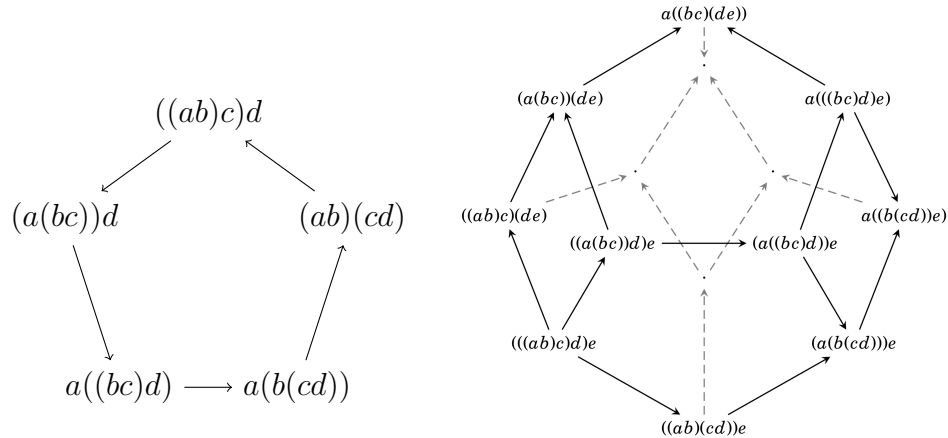


FIGURA 22. Associaedres K_4 i K_5 de Stasheff.
 FONT: Elaboració pròpia (esquerra) i [44] (dreta).

Stasheff va demostrar que, si X és arc-connex, llavors X és homotòpicament equivalent a un espai de llaços si i només si és un espai de tipus A_∞ . Si suprimim la condició que X sigui arc-connex, aleshores cal imposar que la multiplicació a X (corresponent a l'aplicació $K_2 \times X \times X \rightarrow X$) indueixi una estructura de grup en el conjunt de components arc-connexes de X . Aquesta condició també és necessària, ja que el conjunt de components arc-connexes d'un espai de llaços ΩX és justament el grup fonamental de X .

8.1. Opèrades

La família dels associaedres és un exemple del que s'anomena una *opèrada*. La teoria d'opèrades va ser elaborada per Peter May (1939-) a partir del treball pioner de Stasheff. May va caracteritzar a [22] els espais de llaços infinits (és a dir, tals que $X \simeq \Omega X_1$ amb $X_1 \simeq \Omega X_2$, etc.) com aquells que admeten aplicacions contínues $E_n \times X^n \rightarrow X$ per a tot $n \geq 0$ compatibles entre elles, on els espais E_n constitueixen una opèrada E_∞ , sempre suposant que el conjunt de components arc-connexes de X sigui un grup.

L'opèrada A_∞ es pot interpretar com una resolució de l'opèrada A que defineix els monoides (espais amb una multiplicació estrictament associativa i un element neutre), formada per només un punt en cada dimensió $n \geq 1$. De manera semblant, l'opèrada E_∞ és una resolució de l'opèrada simètrica E (és a dir, amb una acció del grup simètric en cada dimensió) que defineix els monoides commutatius. Una acció d'una opèrada E_∞ sobre un espai topològic X el dota d'una multiplicació contínua que és homotòpicament associativa de manera infinitament coherent i alhora homotòpicament commutativa de manera infinitament coherent.

Amb més precisió, una opèrada és una successió O d'espais topològics $O(n)$, on $n \geq 0$, juntament amb un punt distingit a $O(1)$ i *composicions*

$$O(n) \times O(k_1) \times \cdots \times O(k_n) \longrightarrow O(k_1 + \cdots + k_n)$$

que satisfan condicions d'associativitat i unitat, i amb una acció del grup simètric Σ_n sobre $O(n)$ en el cas d'opèrades simètriques. Una *acció* d'una opèrada O sobre un espai topològic X és una col·lecció d'aplicacions contínues $O(n) \times X^n \rightarrow X$ compatibles amb les composicions de l'opèrada. Una acció de O defineix a X una operació n -ària per a cada element de $O(n)$ i aquestes operacions estan totes relacionades entre elles segons la manera indicada per les composicions a O .

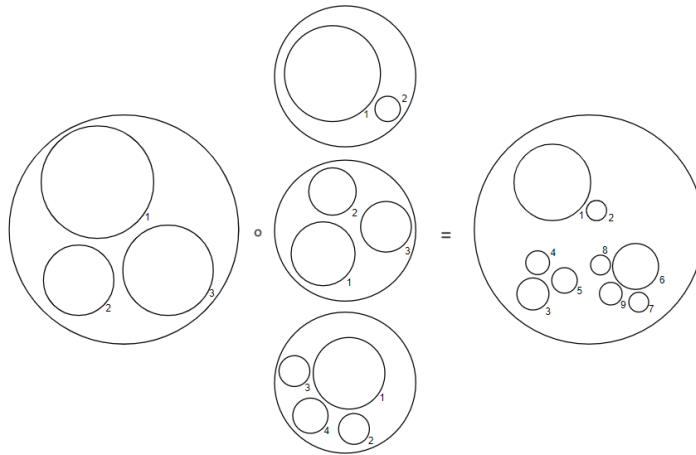


FIGURA 23. Composició $O(3) \times O(2) \times O(3) \times O(4) \rightarrow O(9)$ en una opèrada.
FONT: [45].

Totes les opèrades admeten resolucions, de manera anàloga a com es passa de A a A_∞ i de E a E_∞ . Aquest és el mecanisme amb el qual s'introdueixen estructures algebraïques llevat d'homotopia en espais topològics.

8.2. Teories quàntiques de camps topològiques

Tot i que els objectes de les categories més usuals són conjunts dotats d'alguna estructura (com grups, anells, cossos, etc.) i els morfismes són aplicacions que conserven aquesta estructura, la definició de *categoria* admet més possibilitats. La *categoria de cobordismes* Bord_1 té com a objectes les col·leccions finites de circumferències orientades i els seus morfismes són superfícies que tenen com a vora els objectes donats. Aquesta categoria de cobordismes, que té implicacions en la teoria de cordes en física, va ser un altre dels precursors de la teoria de categories d'ordre infinit.

D'una manera més general, un *cobordisme* entre dues varietats diferenciables compactes M_0 i M_1 orientades de dimensió $n - 1$ és una varietat orientada amb vora W de dimensió n tal que $\partial W = M_0 \cup M_1$ i, a més, l'orientació induïda per W coincideix amb la de M_0 i inverteix la de M_1 . Aquest concepte, remissiu de les homologies de Poincaré, havia estat estudiat per René Thom (1923-2002) en la dècada de 1950 i per molts altres autors subseqüentment.

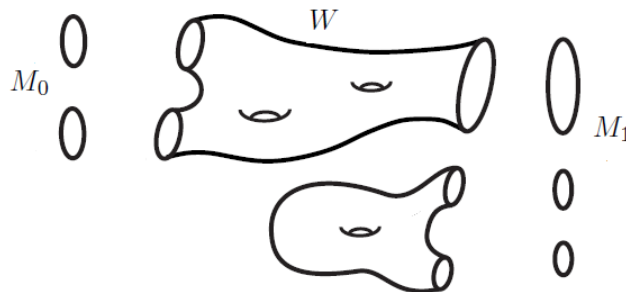


FIGURA 24. Cobordisme $W: M_0 \rightarrow M_1$ entre 1-varietats compactes.

FONT: Elaboració pròpia.

La categoria de cobordisme Bord_n de dimensió n té per objectes les varietats compactes orientades de dimensió n i per morfismes, els cobordismes. La composició de morfismes és la concatenació de cobordismes.

Les components connexes a Bord_n s'anomenen *classes de cobordisme* de varietats de dimensió n . Si considerem totes les dimensions alhora, llavors s'obté un anell amb el producte cartesià i la unió disjunta de varietats. Aquest anell, anomenat *anell de cobordisme*, és l'anell de coeficients d'una teoria d'homologia MO_* . En el cas de varietats amb estructura complexa en el seu fibrat tangent estable, s'obté el cobordisme complex MU_* , que, com hem dit en l'apartat 7, és la teoria d'homologia generalitzada que s'utilitza en la successió espectral d'Adams i Nóvikov.

Una *teoria quàntica de camps topològica* és una representació de la categoria Bord_n en la categoria d'espais vectorials sobre el cos \mathbb{C} dels nombres complexos, és a dir, un functor $\text{Bord}_n \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{C}}$ que envia unions disjunes de varietats a productes tensorials dels espais vectorials corresponents. En particular, tota unió disjunta de circumferències va a parar a un espai vectorial i tota superfície amb vora va a parar a una aplicació lineal entre els espais vectorials corresponents a la vora entrant i a la vora sortint del cobordisme.

La *hipòtesi de cobordisme*, formulada per John Baez (1961-) i James Dolan (1937-) en la dècada de 1990, es pot pensar com una generalització de gran abast del teorema d'Eilenberg i Steenrod, segons el qual una teoria d'homologia està caracteritzada en els poliedres finits pel seu valor en un punt. La hipòtesi de cobordisme afirma que una teoria quàntica de camps topològica està únicament determinada pel seu valor en un punt [15].

Una de les motivacions de la definició de Jacob Lurie (1977-) de les categories d'ordre infinit a [20], que explicarem en l'apartat 8.4, va ser donar un enunciat precís de la hipòtesi de cobordisme i un esbós de demostració.

8.3. *Hipòtesi d'homotopia de Grothendieck*

L'any 1983, en el treball *À la poursuite des champs* [16], Alexander Grothendieck (1928-2014) va desenvolupar la idea que el tipus d'homotopia d'un espai topològic X queda completament caracteritzat per una generalització a totes les dimensions del grupoide fonamental $\pi(X)$. Aquest fet es pot interpretar, en un cert sentit, com una gran millora conceptual del teorema de Whitehead descrit en l'apartat 4.2.

El *grupoide fonamental* de X és una categoria que té per objectes els punts de X i, per a cada parell de punts $x, y \in X$, els morfismes de x a y són les classes d'homotopia de camins de x a y . Cada morfisme $x \rightarrow y$ té un morfisme invers $y \rightarrow x$, degut al fet que la concatenació d'un camí $\sigma: [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\sigma(0) = x$ i $\sigma(1) = y$ amb el mateix camí recorregut en sentit contrari, $\bar{\sigma}(t) = \sigma(1 - t)$, és homòtopa al camí constant en el punt x . El grup fonamental $\pi_1(X, x_0)$ de X en un punt base x_0 és el conjunt de morfismes $x_0 \rightarrow x_0$ en el grupoide fonamental $\pi(X)$.

Per generalitzar aquest concepte a dimensions superiors, considerem, per a cada parell de punts $x, y \in X$, el conjunt dels camins de x a y . A continuació, per a cada parell de camins ω i σ de x a y , considerem el conjunt de les homotopies de ω a σ ; per a cada parell d'homotopies F i G de ω a σ , considerem el conjunt de les homotopies entre homotopies de F a G , i així successivament. L'objecte matemàtic $\pi_\infty(X)$ resultant té 1-morfismes, 2-morfismes, 3-morfismes, etc. A més, tots els morfismes en qualsevol dimensió són invertibles llevat d'homotopies d'un ordre superior. Un objecte amb aquestes característiques s'anomena *grupoide d'ordre infinit*.



FIGURA 25. Alexander Grothendieck (1928-2014) l'any 1970.
FONT: [46].

La *hipòtesi d'homotopia* de Grothendieck és l'afirmació que el tipus d'homotopia d'un espai topològic X està completament determinat pel seu grupoide d'ordre infinit $\pi_\infty(X)$. Ell no va demostrar aquest fet com un teorema, principalment per la manca d'una teoria rigorosa de grupoides d'ordre infinit en aquells anys. No obstant això, va inspirar molts resultats de recerca posteriors i, de fet, una nova línia dins la teoria d'homotopia que s'anomena *homotopia d'ordre superior* (*higher homotopy*, en anglès).

8.4. Categories d'ordre infinit

Els objectes d'estudi més intencionalment en la teoria d'homotopia actualment són les *categories d'ordre infinit* (∞ -*categories*, en anglès), que han quedat ben fonamentades després del treball pioner d'André Joyal (1943-) i de la publicació del llibre de Lurie *Higher topos theory* [20] el 2009.

Tot i que possiblement la millor manera d'introduir la teoria de categories d'ordre infinit sigui definir-les axiomàticament com es fa a [27], una manera escaient de visualitzar les propietats d'una categoria d'ordre infinit és definir-la com un conjunt simplicial X que satisfà la *condició de Kan feble*, que s'explica a continuació. Els vèrtexs de X es pensen com objectes i les arestes es pensen com morfismes; però, a més, X conté símplexs de qualsevol dimensió que representen k -morfismes per a tot k .

El concepte de conjunt simplicial és una abstracció dels complexos simplicials, deguda a Daniel Kan (1927-2013). Un *conjunt simplicial* X és una col·lecció de conjunts X_n per a $n \geq 0$, on els elements de X_n s'anomenen *n -símplexs* de X , juntament amb *cares* $d_i: X_n \rightarrow X_{n-1}$ per a $i \in \{0, \dots, n\}$ i *degeneracions* $s_i: X_n \rightarrow X_{n+1}$ per a $i \in \{0, \dots, n\}$, que satisfan les relacions següents:

$$\begin{aligned} d_i d_j &= d_{j-1} d_i \text{ si } i < j; & d_i s_j &= s_{j-1} d_i \text{ si } i < j; \\ d_i s_j &= \text{id si } i = j \text{ o bé } i = j + 1; & d_i s_j &= s_j d_{i-1} \text{ si } i > j + 1; \\ s_i s_j &= s_{j+1} s_i \text{ si } i \leq j. \end{aligned}$$

Es denota amb Δ^n el n -símplex amb una única cara no degenerada en dimensió n ; amb $\partial\Delta^n$, la seva vora, i amb Λ_k^n , la *vora parcial* k -èsima, que és el conjunt format per les cares de Δ^n excepte la cara k -èsima.



FIGURA 26. Daniel Marinus Kan (1927-2013) l'any 2005.

FONT: [47].

Diem que un conjunt simplicial X satisfà la *condició de Kan feble* si tota aplicació simplicial $\Lambda_k^n \rightarrow X$ es pot estendre a Δ^n per a $k \in \{1, \dots, n-1\}$, és a dir, excepte $k = 0$ i $k = n$. La *condició de Kan* demana el mateix, però per a tot k , i els conjunts simplicials que satisfan la condició de Kan s'anomenen *fibrants* o bé *complexos de Kan*.

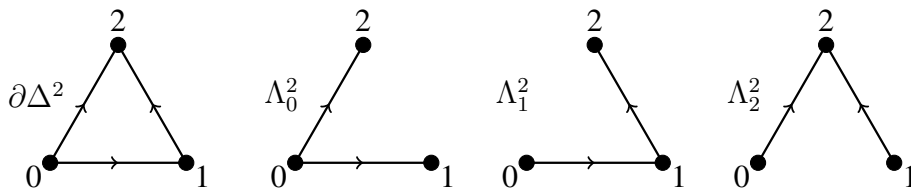


FIGURA 27. Vora de Δ^2 i vores parcials.

FONT: Elaboració pròpia.

En definir les categories d'ordre infinit com els conjunts simplicials que satisfan la condició de Kan feble, s'està interpretant un triangle com la composició de dos morfismes; amb més precisió, un dels costats del triangle és

la composició dels altres dos costats (tenint en compte les orientacions en les arestes induïdes per les aplicacions d_0 , d_1 i d_2). La condició de Kan feble ens garanteix que cada parell de morfismes componibles admet una composició, però la composició no és necessàriament única, ja que en un conjunt simplicial hi pot haver diversos triangles amb una mateixa vora.

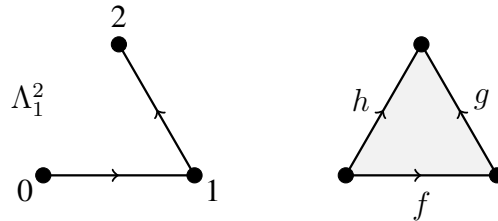


FIGURA 28. Composició de morfismes $h \simeq g \circ f$ en una categoria d'ordre infinit.
FONT: Elaboració pròpia.

Si els triangles es pensen com homotopies, el que realment estem dient és que la composició només està ben definida llevat d'homotopia. Però, a més, la composició de morfismes definida d'aquesta manera no és estrictament associativa, sinó que només ho és llevat d'homotopia. Els símplex de dimensions superiors representen les homotopies.

Degut a aquests fets, les categories d'ordre infinit *no* són categories, sinó un concepte nou, particularment escaient per a la formalització de fenòmens geomètrics i físics, com la hipòtesi de cobordisme de Baez i Dolan (apartat 8.2) i la hipòtesi d'homotopia de Grothendieck (apartat 8.3).

Tota categoria d'ordre infinit X té una *categoria homotòpica* hX associada, que té com a objectes els vèrtexs de X i com a morfismes, les classes d'homotopia d'arestes de X . En aquest cas, hX és una categoria en sentit clàssic, ja que la composició a hX està ben definida i és estrictament associativa amb identitats.

Arribats a aquest punt, un *grupoide d'ordre infinit* es defineix com una categoria d'ordre infinit K tal que tots els morfismes en la seva categoria homotòpica hK són invertibles, és a dir, tal que hK és un grupoide. Les categories d'ordre infinit que tenen aquesta propietat són les que satisfan la condició de Kan: per a totes les vores parcials Λ_k^n i no només per a

$k \neq 0$ i $k \neq n$. Precisament, tal com es mostra a la figura 29, l'existència d'extensions $\Delta^n \rightarrow K$ per a $k = 0$ i $k = n$ proporciona inversos (per l'esquerra si $k = 0$ i per la dreta si $k = n$) per a tots els morfismes de K , llevat d'homotopia.

En aquest context, la hipòtesi d'homotopia de Grothendieck esdevé l'afirmació —ben coneguda des de mitjans del segle xx— que la categoria homotòpica dels espais topològics és equivalent a la categoria homotòpica dels complexos de Kan.

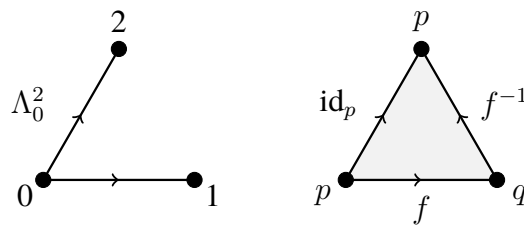


FIGURA 29. Existència d'inversos en complexos de Kan.

FONT: Elaboració pròpia.

9. TEORIA DE TIPUS HOMOTÒPICA

La *teoria de tipus homotòpica* combina l'homotopia amb la teoria de tipus (*type theory*, en anglès), una branca de la lògica i de la informàtica teòrica que és el fonament de diversos programes verificadors de demostracions. La teoria de tipus va ser desenvolupada per Per Martin-Löf (1942-) en la dècada de 1970, tot i que els seus orígens conceptuals provenien de Bertrand Russell (1872-1970). En la teoria de tipus es postula que cada objecte matemàtic és d'un cert *tipus*. Els tipus tenen *termes*, i cada terme només pot ser-ho d'un únic tipus. S'escriu $a : A$ per denotar que a és un terme del tipus A . Pot passar que un tipus no tingui cap terme.

Aquesta idea té una forta analogia amb els llenguatges de programació, en què les variables són sempre d'algun *tipus*. De fet, un dels fonaments de la teoria de tipus és la *correspondència de Curry i Howard*, que relaciona la lògica amb les ciències de la computació i estableix una equivalència entre l'elaboració de programes informàtics i la demostració de teoremes

matemàtics. Els tipus en un llenguatge de programació es corresponen amb les proposicions en un sistema lògic: un tipus representa un enunciat i cada terme d'aquest tipus representa una demostració de l'enunciat.

| Types | Logic | Sets | Homotopy |
|--------------------------|----------------------|-----------------------------|-------------------|
| A | proposition | set | space |
| $a : A$ | proof | element | point |
| $B(x)$ | predicate | family of sets | fibration |
| $b(x) : B(x)$ | conditional proof | family of elements | section |
| $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ | \perp, \top | $\emptyset, \{\emptyset\}$ | $\emptyset, *$ |
| $A + B$ | $A \vee B$ | disjoint union | coproduct |
| $A \times B$ | $A \wedge B$ | set of pairs | product space |
| $A \rightarrow B$ | $A \Rightarrow B$ | set of functions | function space |
| $\sum_{(x:A)} B(x)$ | $\exists_{x:A} B(x)$ | disjoint sum | total space |
| $\prod_{(x:A)} B(x)$ | $\forall_{x:A} B(x)$ | product | space of sections |
| Id_A | equality = | $\{ (x, x) \mid x \in A \}$ | path space A^I |

FIGURA 30. Diccionari de conceptes bàsics entre la teoria de tipus, la lògica, la teoria de conjunts i la teoria d'homotopia.

FONT: [34].

Mitjançant la correspondència de Curry i Howard es pot formalitzar la comprovació de demostracions: una demostració és correcta si el programa corresponent es pot compilar sense inconsistències en els seus tipus. El programa verificador de demostracions més utilitzat és Coq [33].

La teoria de tipus homotòpica incorpora un punt de vista nou, en pensar els tipus com espais topològics (amb més precisió, com complexos de Kan), on entre cada parell de termes x, y d'un tipus X hi pot haver diversos camins. Una igualtat $x = y$ entre dos termes de X no és una relació bàsica que només pugui ser certa o no ser-ho, sinó que la igualtat $x = y$ també és un espai. Si $x = y$ té termes, pot tenir-ne molts; cadascun d'aquests termes es correspon amb un camí de $x \rightarrow y$ i es pot interpretar com una manera de demostrar que x i y són iguals.

Donats dos termes x i y d'un tipus X , el tipus identitat $\text{Id}_X(x, y)$ es correspon amb un espai de camins de x a y en l'espai X ; un terme $p : \text{Id}_X(x, y)$

és un camí $x \rightarrow y$; un terme $\alpha : \text{Id}_{\text{Id}_X(x,y)}(p, q)$ entre dos camins p i q és una homotopia $p \rightarrow q$, i així successivament. Aquest fet mostra que hi ha una relació estreta entre la teoria de categories d'ordre infinit i la teoria homotòpica de tipus. De fet, a cada tipus X se li pot associar un grupoide d'ordre infinit format per identitats successives [7].



FIGURA 31. Vladímir Voievodski (1966-2017) l'any 2011.

FONT: [48].

L'avenç clau que va permetre formalitzar rigorosament la teoria de tipus homotòpica va ser l'*axioma d'univalència*, introduït el 2010 per Vladímir Voievodski (1966-2017) —que va rebre la medalla Fields l'any 2002 pel desenvolupament de l'homotopia motívica. Si es tria inicialment un tipus U , anomenat *univers*, i es consideren tipus $A : U$ i $B : U$, llavors hi ha un tipus $\text{Eq}(A, B)$ que té per elements les equivalències $A \simeq B$ (en el sentit d'equivalències homotòpiques entre espais). L'axioma d'univalència estableix que l'aplicació canònica $\text{Id}_U(A, B) \rightarrow \text{Eq}(A, B)$ és una equivalència, on $\text{Id}_U(A, B)$ és el tipus de les igualtats $A = B$ en l'univers U preestablert. En altres paraules, no cal fer distinció entre el fet que dos tipus siguin isomorfs i que siguin iguals. Les conseqüències d'aquest axioma van originar una revolució formal i conceptual en la teoria de tipus.

El verificador de demostracions més utilitzat en la teoria de tipus homotòpica és Agda [35], per al qual s'estan desenvolupant repositoris com

el d'Egbert Rijke [36]. En la figura 32 es mostra un programa en Agda on es defineix el tipus identitat entre dos termes a i b d'un tipus A i es demostra que la relació d'igualtat entre nombres naturals és reflexiva.

```
agda Copy code  
  
open import Agda.Primitive  
  
-- Define a universe of types at a certain level  
Universe : Level → Set _  
Universe l = Set l  
  
-- The identity type (path type) for any type A and elements a, b of that type  
data Id {l : Level} (A : Universe l) (a b : A) : Set l where  
  refl : Id A a a  
  
-- Example usage: proving reflexivity of identity for natural numbers  
example : ∀ {n : ℕ} → Id ℕ n n  
example = refl
```

FIGURA 32. Exemple d'un programa en Agda.

FONT: Elaboració pròpia.

10. ANÀLISI DE DADES TOPOLÒGICA

En els darrers anys del segle xx es va començar a intuir una nova eina que ha situat de ple la topologia algebraica en l'àmbit de la matemàtica aplicada a les ciències experimentals i de la salut: l'homologia persistent. Tot i que la idea es va gestar en grups de recerca diferents, la persona clau en el naixement i la difusió de l'homologia persistent va ser Herbert Edelsbrunner (1958-). Des de 2015, l'ús dels mètodes d'anàlisi de dades topològica es va estendre gràcies a la disponibilitat de paquets de programari com JavaPlex (2012), GUDHI (2014), Ripser (2016) i Ripser++ (2019).

10.1. *Homologia persistent*

Una *filtració* d'espais topològics és una família uniparamètrica $\{X_t\}$ d'espais tals que $X_s \subseteq X_t$ si $s \leq t$, on el paràmetre t recorre un interval de

nombres reals. Donada una filtració $\{X_t\}$, els grups d'homologia $H_n(X_t)$ estan relacionats entre ells per morfismes $\varphi_{s,t}: H_n(X_s) \rightarrow H_n(X_t)$ per a cada dimensió $n \geq 0$, induïts per les inclusions $X_s \subseteq X_t$ sempre que $s \leq t$.

Es diu que una classe d'homologia $\alpha \in H_n(X_t)$ *neix* a t si α no pertany a la imatge de $\varphi_{s,t}$ per a cap $s < t$, i es diu que $\alpha \in H_n(X_r)$ *mor* a t , on $t \geq r$, si $\varphi_{r,t}(\alpha) = 0$ però $\varphi_{r,s}(\alpha) \neq 0$ per a $r < s < t$. La diferència entre el valor de t on una classe α neix i el valor de t on la mateixa classe α mor s'anomena el *temps de vida* o la *persistència* de α .

Si, per a una dimensió homològica $n \geq 0$ fixada, escollim generadors de $H_n(X_t)$ per a cada t lligats mitjançant els morfismes $\varphi_{s,t}$ i linealment independents en cada t , obtenim el que s'anomena un *codi de barres*, que representa l'evolució de l'homologia de la filtració $\{X_t\}$ en la dimensió n .

Els codis de barres es poden representar, de manera equivalent, mitjançant *diagrames de persistència*, que són conjunts de punts al pla (amb multiplicitats) on hi ha un punt (b, d) per a cada segment del codi de barres que comenci a $t = b$ i acabi a $t = d$. Alguns segments del codi de barres poden allargar-se fins a l'infinit si les classes d'homologia que representen no moren mai. En aquest cas, es representen en el diagrama de persistència com punts situats en el marge superior.

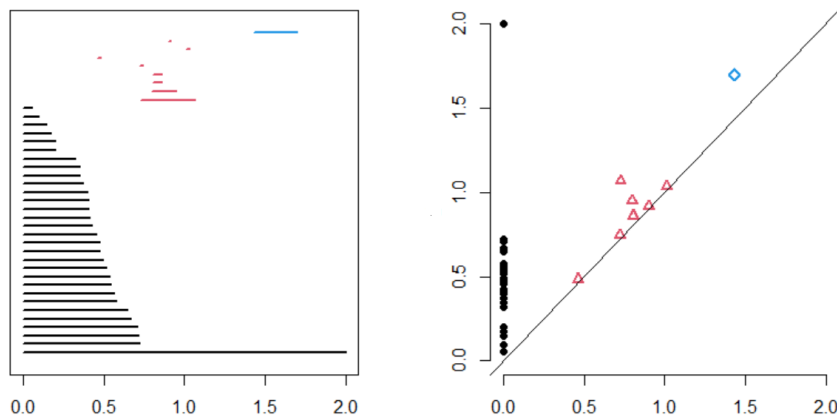


FIGURA 33. Codi de barres i diagrama de persistència:

H_0 (negre); H_1 (vermell); H_2 (blau).

FONT: Elaboració pròpia.

En els diagrames de persistència s'inclou la diagonal $d = b$. Els punts del diagrama sempre queden per damunt d'aquesta diagonal, i els punts propers a la diagonal representen barres de longitud molt curta, és a dir, classes d'homologia amb temps de vida breu.

Hi ha diverses maneres d'obtenir filtracions d'espais topològics relacionades amb l'anàlisi de dades. La més senzilla de definir és la filtració de conjunts de nivell d'una aplicació contínua $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ on X és un espai topològic (en molts casos, un complex simplicial o bé una varietat) i on es defineixen els *conjunts de nivell* com $X_t = \{x \in X \mid f(x) \leq t\}$ per a tot t . En aquest cas, el diagrama de persistència corresponent dona informació sobre el comportament de la funció f . Un cas particular amb eines ben clàssiques és una funció de Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ en una varietat diferenciable M , per a la qual els conjunts de nivell són els subespais de M que van quedant per dessota de cada valor del paràmetre si s'interpreta f com una funció d'altura.

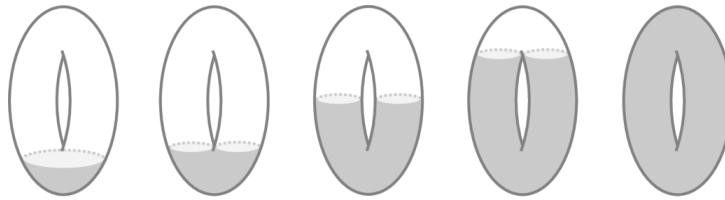


FIGURA 34. Filtració de la superfície d'un tor per conjunts de nivell.

FONT: Elaboració pròpia.

La manera més utilitzada d'obtenir filtracions parteix d'un núvol de punts (és a dir, un conjunt finit P de punts en un espai euclidià o, més generalment, en un espai mètric) i assigna a cada $t \in \mathbb{R}$ un complex simplicial R_t que té un k -símplex per a cada família x_0, \dots, x_k de punts de P tals que $d(x_i, x_j) \leq t$ per a qualsevol parell i, j . De fet, es pot pensar R_t com el conjunt de nivell t per a una funció f definida en el conjunt de tots els subconjunts no buits de P que assigna a cada subconjunt S el seu diàmetre (és a dir, el màxim de les distàncies entre els punts de S). Aquesta col·lecció $\{R_t\}$ és una filtració d'un $(n - 1)$ -símplex on n és el nombre de punts de P , que s'anomena *filtració de Vietoris i Rips*. El nom es refereix

a Leopold Vietoris (1891-2002), que ja hem esmentat en l'apartat 3.1 com un dels pioners de l'homologia, i Eliyahu Rips (1948-), que va utilitzar complexos similars a aquests en la teoria geomètrica de grups.

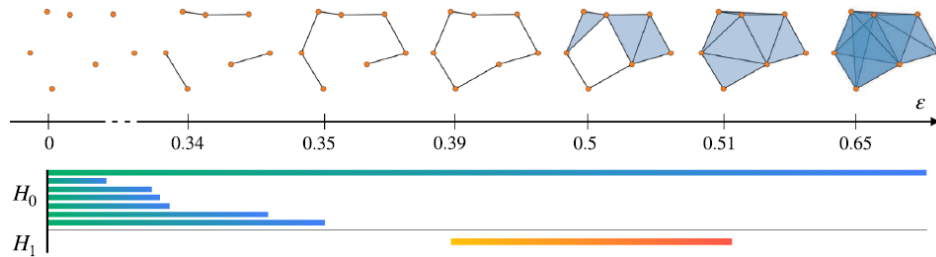


FIGURA 35. Filtració de Vietoris i Rips per a un núvol de punts i codi de barres per a l'homologia en dimensions 0 i 1.

FONT: [49].

Per obtenir una filtració de Vietoris i Rips d'un núvol de punts P , és suficient escollir un ordre x_1, \dots, x_n en els punts de P i considerar la matriu de distàncies $D = (d_{ij})$, on $d_{ij} = d(x_i, x_j)$ per a $1 \leq i \leq n$ i $1 \leq j \leq n$.

Fent abstracció d'aquest fet, es pot associar una filtració de Vietoris i Rips a qualsevol matriu quadrada. Tanmateix, en problemes pràctics, convé suposar que aquesta matriu és simètrica i té els coeficients no negatius, amb coeficients iguals a zero en la diagonal, o almenys que en cada fila l'element de la diagonal és menor o igual que la resta de coeficients de la fila.

10.2. Descriptors de persistència

A partir d'un diagrama de persistència es poden calcular diversos descriptors numèrics o vectorials potencialment útils per a l'anàlisi de dades. El mètode d'anàlisi que s'utilitzi dependrà dels objectius que es vulguin assolir i de les dades que es tinguin, que poden ser, entre d'altres:

- a) Núvols de punts, en què la dimensió de l'espai ambient dependrà del nombre de variables que s'estiguin mesurant en cada individu.
- b) Sèries temporals d'electroencefalogrames [14], electrocardiogrames [13], índexs borsaris [2], etc.

- c) Imatges en escala de grisos, en què la filtració ve donada per la intensitat de blanc en els píxels de la imatge [8].
- d) Grafs, en què la filtració pot venir donada per longituds mínimes de camins entre vèrtexs o bé pels graus dels vèrtexs [26].

Els principals descriptors de persistència numèrics d'un diagrama de persistència D són la *persistència total* i l'*entropia*:

$$P = \sum_{(b,d) \in D} (d - b), \quad E = \sum_{(b,d) \in D} \left(\frac{d - b}{P} \right) \log \left(\frac{d - b}{P} \right).$$

L'entropia quantifica la diversitat de longituds dels segments del codi de barres associat al diagrama D i és menys afectada pel nombre de punts del diagrama D que la persistència total [3].

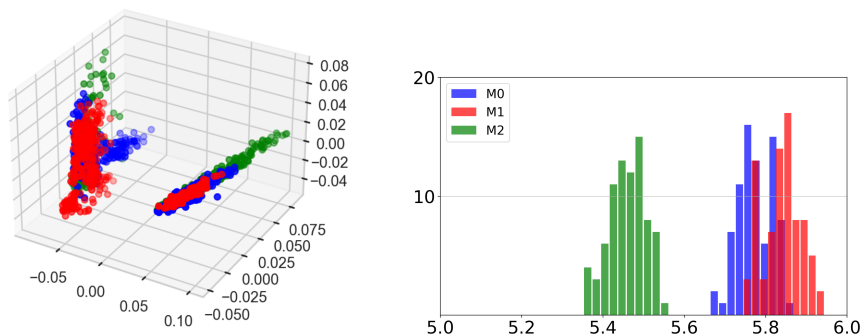


FIGURA 36. Núvol de punts corresponents a tres estats motivacionals dels individus d'un estudi de neurociència del comportament (esquerra) i distribució de freqüències de la persistència total de cada estat (dreta).

FONT: [50].

Com a exemple, en la figura 36 es representa un núvol de punts en dimensió 3 amb tres colors i la distribució de persistència total dels punts de cada color, obtinguda amb 80 mostres aleatòries d'un 75 % dels punts cada vegada. Els colors corresponen a tres estats motivacionals dels individus d'un experiment en què es proposava un joc d'atenció sense adversari (M_0),

amb un adversari inexpert (M_1) i amb un adversari expert (M_2). El núvol de punts és una projecció mitjançant anàlisi de components principals d'un conjunt de dades en dimensió 60 corresponent a valors mitjans d'electroencefalogrames obtinguts de 60 elèctrodes col·locats en el cervell. La separació dels punts en dos blocs és deguda al fet que l'experiment es va fer en dues sessions. Les distribucions de persistència total de cada estat són significativament diferents en un test de Kolmogorov i Smirnov [14].

Els principals descriptors vectorials són els *perfils de persistència* (en anglès, *landscapes* [10]), que són conjunts de funcions de suport compacte obtingudes tal com il·lustra la figura 37, i les *imatges de persistència*, que són sumes ponderades de funcions gaussianes centrades en els punts del diagrama de persistència donat.

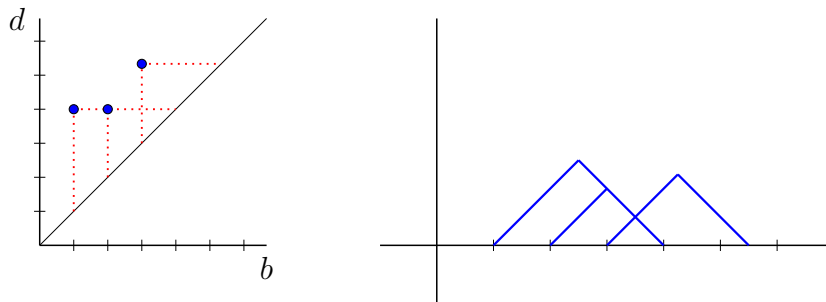


FIGURA 37. Perfil (dreta) associat a un diagrama de persistència (esquerra).

FONT: Elaboració pròpia.

La dissimilaritat entre dos diagrames de persistència es pot quantificar de diverses maneres. El *nucli de Reininghaus* [25] va ser el primer d'una família de nuclis que s'han anat desenvolupant des de 2015 per a diagrames de persistència. A cada diagrama de persistència D se li associa una funció $u_D(x, y, t)$ en el domini $\{(x, y) \mid y \geq x\}$ amb un paràmetre σ , obtinguda com a solució de l'equació de la calor $u_t = \Delta u$, on Δ és l'operador laplaciana i u_t és la derivada parcial de u respecte a t . La condició inicial per a $t = 0$ és una distribució delta de Dirac en els punts (b, d) del diagrama D donat. Hi ha una condició de frontera, que és $u_D(x, x, t) = 0$ per a tot t en els punts de la diagonal de D . S'ha d'escollir un valor σ corresponent al valor de t on s'atura la difusió, que determinarà la resolució del resultat. Per a

dos diagrames de persistència D_1 i D_2 i un valor de σ prefixat, el valor del nucli de Reininghaus $K_\sigma(D_1, D_2)$ és el producte escalar L^2 de les funcions u_{D_1} i u_{D_2} . El seu valor explícit és

$$\frac{1}{8\pi\sigma} \sum_{p \in D_1, q \in D_2} \left(\exp\left(-\frac{\|p - q\|^2}{8\sigma}\right) - \exp\left(-\frac{\|p - \bar{q}\|^2}{8\sigma}\right) \right),$$

on $\bar{q} = (d, b)$ si $q = (b, d)$. La distància entre D_1 i D_2 és aleshores

$$d(D_1, D_2) = (K_\sigma(D_1, D_1) + K_\sigma(D_2, D_2) - 2K_\sigma(D_1, D_2))^{1/2}.$$

L'ús d'aquesta distància permet obtenir una significança estadística de la distinció entre dos conjunts de dades que hagin donat lloc als diagrames D_1 i D_2 que es comparen.

Els descriptors de persistència són adients tant per a inferència estadística com per introduir-los, per exemple, en una xarxa neuronal.

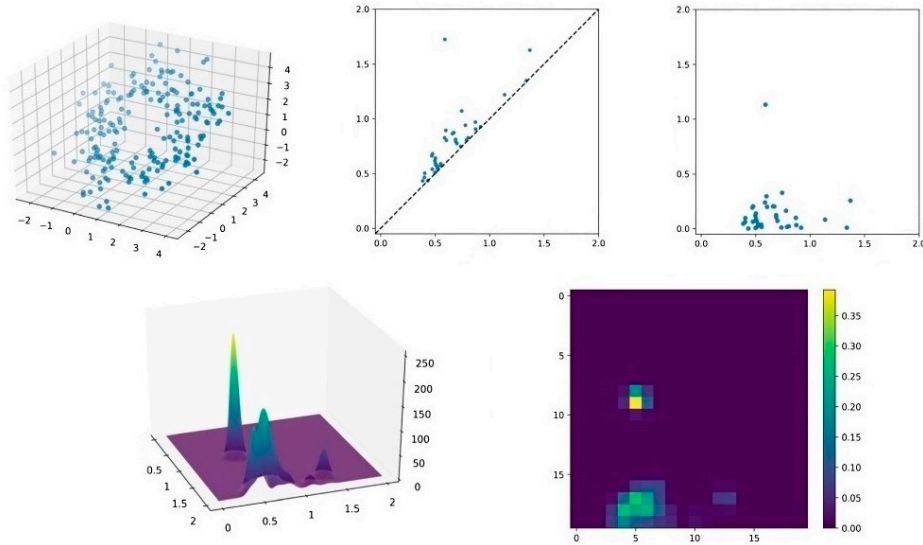


FIGURA 38. A la fila superior: núvol de punts, diagrama de persistència per a l'homologia H_1 del complex de Vietoris i Rips del núvol de punts, i diagrama modificat amb la transformació $(x, y) \mapsto (x, y - x)$; a la fila inferior: superfície de persistència i imatge de persistència corresponents.

FONT: [51].

10.3. Xarxes neuronals

Es mostra a [5] que determinats descriptors de persistència numèrics estan correlats amb la bretxa de generalització de les xarxes neuronals. Aquest treball va partir de resultats previs de [11] i ha servit per construir regularitzadors basats en homologia persistent a [6] que redueixen la bretxa de generalització amb més eficàcia que altres regularitzadors existents.

En una tasca de classificació mitjançant aprenentatge automàtic (en anglès, *machine learning*), es considera un conjunt de dades X amb una distribució de probabilitat conjunta i una funció hipotètica $f: X \rightarrow Y$, on Y és un conjunt finit d'etiquetes. Una xarxa neuronal es pot pensar com una funció $N: X \rightarrow Y$ que depèn de diversos paràmetres. L'objectiu de la tasca és ajustar aquests paràmetres per tal que N s'aproximi tant com sigui possible a f . Per assolir aquest objectiu, se selecciona una *funció de pèrdua* $L: Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ que sigui derivable; per exemple, $L(y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)^2$.

Donada una mostra $\{(x_i, y_i)\}$ de m punts de $X \times Y$, es calcula la mitjana $R = (1/m) \sum_{i=1}^m L(N(x_i), y_i)$, anomenada *risc empíric*, i es determinen, amb descens del gradient, els valors dels paràmetres de N que minimitzen el risc empíric R . Es tracta d'un procés iteratiu, en què la funció de pèrdua mesura la precisió de les prediccions de la xarxa en cada pas.

La mostra $\{(x_i, y_i)\}$ s'acostuma a separar en un *conjunt d'entrenament*, que s'utilitza per minimitzar el risc empíric, i un *conjunt de prova*. La qualitat de la xarxa es mesura utilitzant funcions d'efectivitat. La funció d'efectivitat més habitual en problemes de classificació és la *precisió*, que és el percentatge d'encerts de la xarxa en un conjunt donat. La diferència entre les mesures d'efectivitat en el conjunt de prova i en el conjunt d'entrenament és la *bretxa de generalització*, que es procura que sigui petita en valor absolut per tal que la xarxa doni bons resultats de classificació en altres mostres diferents extretes de $X \times Y$. Habitualment es complementa la funció de pèrdua amb *regularitzadors* que redueixin la bretxa de generalització, i així evitar que la xarxa memoritzi les dades del conjunt d'entrenament (en anglès, *overfitting*) en comptes d'aprendre a associar dades amb etiquetes genèricament.

Cada xarxa neuronal té una arquitectura concreta, consistent en un conjunt de nodes anomenats *neurones*, que estan connectats per arestes i que es

reparteixen en diverses *capes*. Hi ha una capa d'entrada, una capa de sortida i una o més capes intermèdies. Es parla d'aprenentatge profund (en anglès, *deep learning*) si hi ha més de dues capes intermèdies. En les xarxes tradicionals, cada capa rep dades numèriques de les capes anteriors i en passa una combinació afí a la capa següent després de fer-hi una transformació no lineal amb un patró fixat.

Si V és el conjunt de neurones d'una xarxa, llavors per a cada $v \in V$ el valor $N_v(x)$ en una neurona $v \in V$ per a una dada $x \in X$ s'anomena *activació* de v en x , i depèn dels valors que li arribin de neurones prèvies que hi estiguin connectades. El conjunt d'activacions es pot pensar com un vector aleatori A amb tantes components com neurones, que pren valors sobre el conjunt d'entrenament. Si s'ordena el conjunt de neurones com $\{v_1, \dots, v_n\}$, s'obté una matriu formada per distàncies de correlació entre les neurones un cop acabat el procés d'entrenament, en què la *distància de correlació* entre v_i i v_j es defineix com

$$d(v_i, v_j) = 1 - |\text{corr}(A_{v_i}, A_{v_j})|.$$

La funció corr és el coeficient de correlació de Pearson, que pren valors entre -1 i 1 . Dues neurones estan allunyades si el seu coeficient de correlació s'acosta a zero i són properes si el seu coeficient de correlació s'acosta a 1 en valor absolut.

Amb aquesta matriu es pot generar una filtració de Vietoris i Rips i obtenir un diagrama de persistència, que conté informació sobre les redundàncies existents en la xarxa neuronal un cop acabat l'entrenament, és a dir, sobre com s'apleguen les neurones de la xarxa en grups col·laboratius.

En la figura 39 es mostra la relació existent entre la mitjana i la desviació típica de les ordenades dels punts del diagrama de persistència en homologia H_0 i H_1 i la bretxa de generalització en diverses arquitectures de xarxes neuronals. Els colors corresponen a xarxes amb profunditats diferents. En cada color s'aprecia una relació inversa de les mitjanes amb la bretxa de generalització i una relació directa de les desviacions típiques.

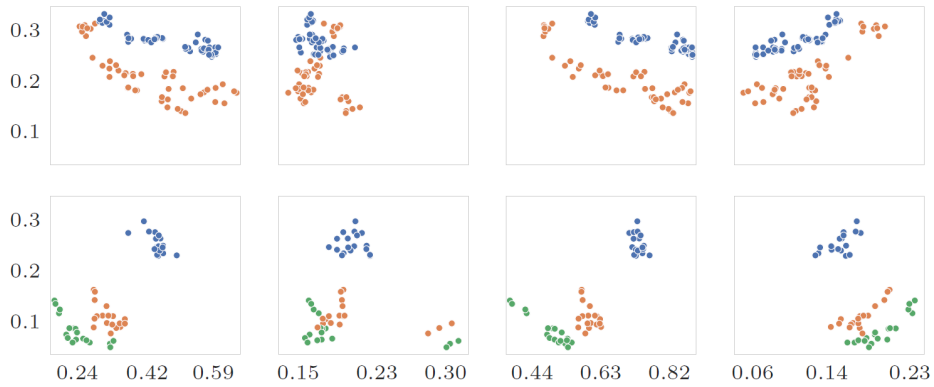


FIGURA 39. Relació dels descriptors de persistència de les correlacions entre activacions amb la bretxa de generalització en diferents xarxes neuronals, en què cada color representa una profunditat. Columna 1: mitjana de la coordenada d en homologia H_0 ; columna 2: desviació estàndard de d en H_0 ; columna 3: mitjana de d en H_1 ; columna 4: desviació de d en H_1 .

FONT: [52].

Per tal d'aprofitar aquesta relació, a [6] es van construir regularitzadors que, durant el procés d'entrenament, augmentaven les mitjanes i disminuïen les desviacions típiques dels punts dels diagrames de persistència entre vectors d'activacions de neurones.

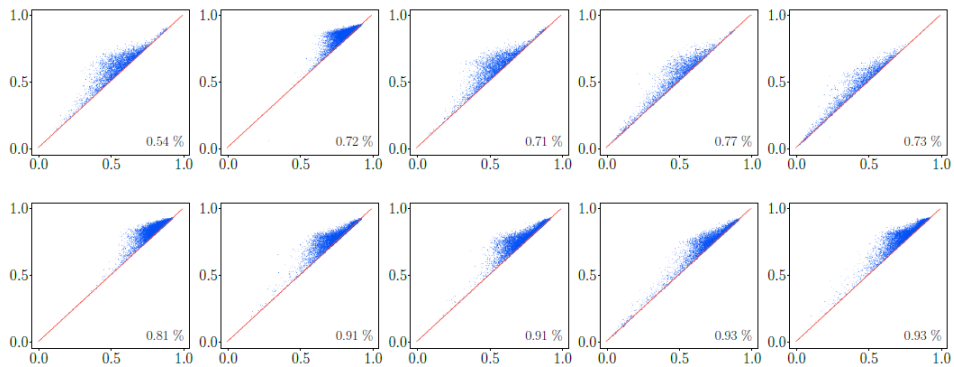


FIGURA 40. Diagrames de persistència en H_1 corresponents a xarxes neuronals en què s'assoleixen precisions mínimes (fila superior) i màximes (fila inferior).

FONT: [52].

Tal com es veu en la figura 40, els diagrames de persistència de les xarxes que generalitzen millor tenen els punts més agrupats i situats més cap amunt de la diagonal. Aquest és un cas en què punts propers a la diagonal, que habitualment es consideren soroll, aporten informació rellevant si es té en compte la seva distribució al llarg de la diagonal.

Així doncs, en cada pas del procés d'entrenament, un regularitzador basat en homologia persistent va ajustant els paràmetres de la xarxa per tal que el diagrama de persistència del resultat final s'assembli tant com sigui possible als models de les xarxes més eficients. L'estratègia que s'ha utilitzat a [6] ha estat reduir selectivament les correlacions més grans entre els vectors d'activacions de les neurones, però només les correlacions més grans, pel motiu següent: se sap que, en xarxes biològiques (com el cervell humà), és necessari un cert grau de redundància per al funcionament òptim de la xarxa. L'experiment que s'acaba de descriure dona pes a la hipòtesi que en les xarxes neuronals artificials té lloc un fenomen semblant.

10.4. *Aprenentatge automàtic topològic*

Les *xarxes neuronals de grafs* operen amb conjunts de dades que no són només dades numèriques sinó també relacionals: cada element del conjunt de dades s'estructura en nodes amb connexions entre ells representades per arestes, que poden ser dirigides o no dirigides. Tant els nodes com les arestes poden tenir pesos o bé vectors associats, que aniran variant durant el procés d'entrenament de la xarxa, sense modificar les matrius d'incidència. Les xarxes neuronals de grafs són només un cas particular del que s'anomena *aprenentatge automàtic geomètric*, en què els conjunts de dades poden admetre estructures diverses, com simetries o mètriques de Riemann [9].

Els mètodes d'anàlisi de dades topològica també s'apliquen a les xarxes neuronals de grafs i, més en general, a dades estructurades mitjançant complexos simplicials, en els quals, a més de vèrtexs i arestes, hi ha símplexs de dimensions superiors. Amb les xarxes neuronals de complexos simplicials es captura informació que involucra relacions no només binàries entre els nodes, sinó d'ordre arbitrari. Habitualment l'entrenament de la xarxa es controla amb laplacians de Hodge.

11. CONCLUSIÓ

La topologia algebraica va començar amb l'estudi de l'homologia i de l'homotopia, i va entrar al segle XXI encetant línies noves de recerca basades precisament en l'homologia i en l'homotopia.

Una d'aquestes línies, l'estudi de les categories d'ordre infinit, està assolint nivells molt alts d'abstracció i s'acosta cada cop més a una axiomatització de la teoria d'homotopia que pugui abastar no només la topologia algebraica tradicional, sinó també diverses connexions amb la geometria i amb la física. Al mateix temps, en la banda aplicada, la validesa de la teoria de tipus homotòpica per a la verificació automàtica de demostracions i la sorprenent eficàcia de l'homologia persistent en l'anàlisi de dades de tota mena han situat la topologia en un lloc d'impacte mai vist fins ara en altres disciplines.

Referint-se a l'*analysis situs*, Poincaré va escriure en una nota publicada als *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* el 1892: «C'est parce que les recherches de ce genre peuvent avoir des applications en dehors de la Géométrie qu'il peut y avoir quelque intérêt à les poursuivre» («És perquè les investigacions d'aquest tipus poden tenir aplicacions fora de la geometria que pot haver-hi algun interès a continuar-les»).

Les motivacions d'ara són diferents de les que van guiar Poincaré, perquè el món d'ara s'assembla ben poc al que va viure ell. Tanmateix, és difícil que ara algú pugui tenir dubtes de la importància d'anar més enllà.

REFERÈNCIES

- [1] ADAMS, J. F. (1966). «On the groups $J(X)$ ». *Topology*, 5, p. 21-71.
- [2] AROMI, L. L.; KATZ, Y. A.; VIVES, J. (2021). «Topological features of multivariate distributions: Dependency on the covariance matrix». *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 103, 105996.
- [3] ATIENZA, N.; GONZÁLEZ-DÍAZ, R.; SORIANO-TRIGUEROS, M. (2020). «On the stability of persistent entropy and new summary functions for topological data analysis». *Pattern Recognition*, 107, 107509.

- [4] AWODEY, S.; PELAYO, Á.; WARREN, M. A. (2013). «Voevodsky's univalence axiom in homotopy type theory». *Notices of the AMS* [Providence: American Mathematical Society], p. 1164-1167.
- [5] BALLESTER, R.; ARNAL CLEMENTE, X.; CASACUBERTA, C.; MADADI, M.; CORNEANU, C. A.; ESCALERA, S. (2024). «Predicting the generalization gap in neural networks using topological data analysis». *Neurocomputing*, 596, 127787.
- [6] BALLESTER, R.; CASACUBERTA, C.; ESCALERA, S. (en premsa). «Decorrelating neurons using persistence». *Proceedings of Machine Learning Research (PMLR): NeurIPS 2023 Workshop on Symmetry and Geometry in Neural Representations*.
- [7] BERG, B. van den; GARNER, R. (2011). «Types are weak ω -groupoids». *Proceedings of the London Mathematical Society*, 102, p. 370-394.
- [8] BLEILE, B.; GARIN, A.; HEISS, T.; MAGGS, K.; ROBINS, V. (2022). «The persistent homology of dual digital image constructions». *Research in Computational Topology*, 2, p. 1-26.
- [9] BRONSTEIN, M. M.; BRUNA, J.; COHEN, T.; VELIČKOVIĆ, P. (2021). «Geometric deep learning: Grids, groups, graphs, geodesics, and gauges». arXiv:2104.13478.
- [10] BUBENIK, P. (2015). «Statistical topological data analysis using persistence landscapes». *Journal of Machine Learning Research*, 16, p. 77-102.
- [11] CORNEANU, C. A.; ESCALERA, S.; MARTINEZ, A. M. (2020). «Computing the testing error without a testing set». A: *2020 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, p. 2674-2682.
- [12] DEHN, M.; HEEGAARD, P. (1907). «Analysis situs». A: *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*. III AB3. Leipzig: Teubner, p. 153-200.

- [13] FERRÀ, A.; CASACUBERTA, C.; PUJOL, O. (2023). «Importance attribution in neural networks by means of persistence landscapes of time series». *Neural Computing and Applications*, 35, p. 20143-20156.
- [14] FERRÀ, A.; CECCHINI, G.; NOBBE FISAS, F.-P.; CASACUBERTA, C.; COS, I. (2023). «A topological classifier to characterize brain states: When shape matters more than variance». *PLoS ONE*, 18, e0292049.
- [15] FREED, D. S. (2013). «The cobordism hypothesis». *Bulletin of the American Mathematical Society*, 50, p. 57-92.
- [16] GROTHENDIECK, A. (2022 [1983]). *À la poursuite des champs*. Edició a cura de G. Maltsiniotis. París: Société Mathématique de France. (Documents Mathématiques; 20)
- [17] GUERRA, M.; DE GREGORIO, A.; FUGACCI, U.; PETRI, G.; VACCARINO, F. (2021). «Homological scaffold via minimal homology bases». *Scientific Reports*, 11, 5355.
- [18] HAUSDORFF, F. (1914). *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig: Veit & Comp.
- [19] HUREWICZ, W. (1935). «Beiträge zur Topologie der Deformationen I: Höherdimensional Homotopiegruppen; II: Homotopie- und Homologiegruppen». *Koninklijke Akademie van Wetenschappen*, 38, p. 112-119; 521-528.
- [20] LURIE, J. (2009). *Higher topos theory*. Oxford, Princeton, NJ: Princeton University Press. (Annals of Mathematics Studies; 170)
- [21] MARTIN-LÖF, P. (1975). «An intuitionistic theory of types: Predicative part». *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics* [Amsterdam: North-Holland], 80, p. 73-118.
- [22] MAY, J. P. (1972). *The geometry of iterated loop spaces*. Berlín, Heidelberg: Springer. (Lecture Notes in Mathematics; 271)

- [23] POINCARÉ, H. (1895). «Analysis situs». *Journal de l'École Polytechnique*, 1, p. 1-121. [Tornat a publicar a *Œuvres de Henri Poincaré* (1953). Vol. VI. París: Gauthier-Villars, p. 193-288]
- [24] RAVENEL, D. C. (1992). *Nilpotence and periodicity in stable homotopy theory*. Princeton, NJ: Princeton University Press. (Annals of Mathematics Studies; 128)
- [25] REININGHAUS, J.; HUBER, S.; BAUER, U.; KWITT, R. (2015). «A stable multi-scale kernel for topological machine learning». A: *2015 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, p. 4741-4748.
- [26] RIECK, B.; BOCK, C.; BORWARDT, K. (2019). «A persistent Weisfeiler-Lehman procedure for graph classification». *Proceedings of Machine Learning Research (PMLR)*, 97: *Proceedings of the 36th International Conference on Machine Learning*, p. 5448-5458.
- [27] RIEHL, E.; VERITY, D. (2022). *Elements of ∞ -category theory*. Cambridge: Cambridge University Press. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics; 194)
- [28] SERRE, J.-P. (1951). «Homologie singulière des espaces fibrés. Applications». *Annals of Mathematics*, 54, p. 425-505.
- [29] SIERSMA, D. (2012). «Poincaré and *Analysis situs*, the beginning of algebraic topology». *Nieuw Archief voor Wiskunde*, sèrie 5, 13, p. 196-200.
- [30] STASHEFF, J. (1963). «Homotopy associativity of H-spaces, I and II». *Transactions of the American Mathematical Society*, 108, p. 275-292; 293-312.
- [31] STOLZ, B. J.; EMERSON, T.; NAHKURI, S.; PORTER, M. A.; HARRINGTON, H. A. (2021). «Topological data analysis of task-based fMRI data from experiments on schizophrenia». *Journal of Physics: Complexity*, 2, 035006.

- [32] <<https://www.claymath.org/millennium-problems/>>.
- [33] <<http://coq.inria.fr>>.
- [34] Taula extreta de: THE UNIVALENT FOUNDATIONS PROGRAM (2013). *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. Princeton, NJ: Institute for Advanced Study. <<https://homotopytypetheory.org/book/>>, amb llicència Creative Commons CC BY-SA 3.0, <<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>>.
- [35] <<https://wiki.portal.chalmers.se/agda/pmwiki.php>>.
- [36] <<https://github.com/HoTT/HoTT-Agda>>.
- [37] Fotografia extreta de Wikimedia Commons, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Henri_Poincaré-2.jpg>.
- [38] Fotografia extreta de Wikimedia Commons, <[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Noether_\(petite_image\).png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Noether_(petite_image).png)>.
- [39] Fotografia extreta de Wikimedia Commons, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Henry_whitehead_age_30_approx.jpg>, amb llicència Creative Commons CC BY-SA 2.5, <<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5>>.
- [40] SIXWINGEDSERAPH. Fotografia extreta de Wikimedia Commons, <<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:1-image0.jpg>>, amb llicència Creative Commons CC BY-SA 4.0, <<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>>.
- [41] JOHNSON, N. Imatge extreta de Wikimedia Commons, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hopf_Fibration.png>, amb llicència Creative Commons CC BY 4.0, <<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0>>.
- [42] JACOBS, K. Fotografia extreta de Wikimedia Commons, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Puppe_Adams.jpg>, amb llicència Creative Commons CC BY-SA 2.0 DE, <<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/de>>.

- [43] Imatge extreta de Wikipedia, <https://en.wikipedia.org/wiki/Homotopy_groups_of_spheres>, amb llicència Creative Commons CC BY-SA 4.0, <<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>>.
- [44] JOHNSON, N. Imatge extreta de Wikimedia Commons, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Associahedron_K5_front.svg>, amb llicència Creative Commons CC0 1.0, <<https://creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0/>>.
- [45] LADISLAV THE POSTHUMOUS. Imatge extreta de Wikipedia, <https://en.wikipedia.org/wiki/File:Composition_in_the_little_discs_operad.svg>, amb llicència Creative Commons CC BY-SA 3.0, <<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>>.
- [46] JACOBS, K. Fotografia extreta de Wikimedia Commons, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Alexander_Grothendieck.jpg>, amb llicència Creative Commons CC BY-SA 2.0 DE, <<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/de/>>.
- [47] KAN, J. Fotografia extreta de Wikimedia Commons, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Daniel_Kan.JPG>, amb llicència Creative Commons CC BY-SA 3.0, <<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>>.
- [48] SCHMID, R. Fotografia extreta de Wikimedia Commons, <<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:VladimirVoevodsky.jpg>>, amb llicència Creative Commons CC BY-SA 2.0 DE, <<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/de/>>.
- [49] Imatge extreta de [17], amb llicència Creative Commons CC BY 4.0, <<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>>.
- [50] Imatges adaptades de [14], amb llicència Creative Commons CC BY 4.0, <<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>>.
- [51] Imatge adaptada de [31], amb llicència Creative Commons CC BY 4.0, <<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>>.
- [52] Imatge adaptada de [5], amb llicència Creative Commons CC BY 4.0, <<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>>.

